



Séminaire de physique mathématique de Caen
Symétrie miroir des cordes ouvertes, modèles A et B de
Witten

HMS: Motivations Physiques, outils mathématiques:

Ph Durand: *Conservatoire national des arts et métiers Paris*

juin 2012

Plan de l'exposé

- 1 -Introduction

Plan de l'exposé

- ① -Introduction
- ② -Branes et théorie des champs "à bord".

Plan de l'exposé

- ① -Introduction
- ② -Branes et théorie des champs "à bord".
- ③ -Le programme de Kontsevich de 1994 .

Plan de l'exposé

- ① -Introduction
- ② -Branes et théorie des champs "à bord".
- ③ -Le programme de Kontsevich de 1994 .
- ④ -Toujours de la géométrie symplectique coté A...

Plan de l'exposé

- ① -Introduction
- ② -Branes et théorie des champs "à bord".
- ③ -Le programme de Kontsevich de 1994 .
- ④ -Toujours de la géométrie symplectique coté A...
- ⑤ -Et de la géométrie complexe du coté B...

Plan de l'exposé

- ① -Introduction
- ② -Branes et théorie des champs "à bord".
- ③ -Le programme de Kontsevich de 1994 .
- ④ -Toujours de la géométrie symplectique coté A...
- ⑤ -Et de la géométrie complexe du coté B...
- ⑥ -Cas du tore : Un exemple illustratif...

Plan de l'exposé

- ① -Introduction
- ② -Branes et théorie des champs "à bord".
- ③ -Le programme de Kontsevich de 1994 .
- ④ -Toujours de la géométrie symplectique coté A...
- ⑤ -Et de la géométrie complexe du coté B...
- ⑥ -Cas du tore : Un exemple illustratif...
- ⑦ -Références

I) Introduction

Cordes ouvertes et symétrie miroir

Nous avons préalablement développé une symétrie miroir mettant en jeu les cordes fermées, sensées traduire la gravitation. On peut se demander si une telle théorie peut être adaptée aux cordes ouvertes : la réponse est oui.

I) Introduction

Cordes ouvertes et symétrie miroir

Nous avons préalablement développé une symétrie miroir mettant en jeu les cordes fermées, sensées traduire la gravitation. On peut se demander si une telle théorie peut être adaptée aux cordes ouvertes : la réponse est oui.

T-dualité

On a vu que la symétrie miroir était une forme élaborée de T dualité. Mais comment traduire le nombre d'enroulement dans le cas des cordes ouverte ?

I) Introduction

Cordes ouvertes et symétrie miroir

Nous avons préalablement développé une symétrie miroir mettant en jeu les cordes fermées, sensées traduire la gravitation. On peut se demander si une telle théorie peut être adaptée aux cordes ouvertes : la réponse est oui.

T-dualité

On a vu que la symétrie miroir était une forme élaborée de T dualité. Mais comment traduire le nombre d'enroulement dans le cas des cordes ouverte ?

Branes

La réponse à la question précédente existe : on peut enrouler une corde ouverte à condition que ses extrémités soit accrochées à des branes. Ainsi symétrie miroir des cordes ouverte repose sur cette "dualité" : cordes (ouvertes)-branes.

II) Théories de champs à bord, branes

Analogie non gratuite

En théorie axiomatique de l'homologie, on considère souvent l'homologie relative d'un truc par un sous truc, souvent son bord note $H_*(A, B)$. En fait on peut faire la même chose en théorie topologique des champs

II) Théories de champs à bord, branes

Analogie non gratuite

En théorie axiomatique de l'homologie, on considère souvent l'homologie relative d'un truc par un sous truc, souvent son bord note $H_*(A, B)$. En fait on peut faire la même chose en théorie topologique des champs

Théorie de champs à bord

On peut remplacer en théorie des champs l'espace source Σ par la paire $(\Sigma, \partial\Sigma)$, et ainsi penser, par exemple à l'évolution d'une corde ouverte dont les extrémités sont contraintes de rester fixées sur une (ou des) brane(s).

II) Théories de champs à bord, branes

Analogie non gratuite

En théorie axiomatique de l'homologie, on considère souvent l'homologie relative d'un truc par un sous truc, souvent son bord note $H_*(A, B)$. En fait on peut faire la même chose en théorie topologique des champs

Théorie de champs à bord

On peut remplacer en théorie des champs l'espace source Σ par la paire $(\Sigma, \partial\Sigma)$, et ainsi penser, par exemple à l'évolution d'une corde ouverte dont les extrémités sont contraintes de rester fixées sur une (ou des) brane(s).

Modéliser les théories de jauge et la gravité

Cette approche permettrait de décrire toutes les particules et pas seulement la gravitation. dans cette théorie en effet, les particules du modèle standard $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ sont vues comme des cordes ouvertes accrochées à une brane : l'univers dans lequel nous évoluons.

Dirichlet brane

Définition

Une *D-Brane géométrique* est un triplet (L, E, ∇_E) où L est une sous variété de dimension réelle $p : L \subset M$, E un fibré vectoriel et ∇_E une connexion sur E

Dirichlet brane

Définition

Une *D-Brane géométrique* est un triplet (L, E, ∇_E) où L est une sous variété de dimension réelle p : $L \subset M$, E un fibré vectoriel et ∇_E une connexion sur E

Corde ouverte

Une corde ouverte d'origine (L, E, ∇_E) et d'extrémité (K, F, ∇_F) est une application X de $I = [0, 1]$ dans M avec $X(0) \in L$, $X(1) \in K$

Dirichlet brane

Définition

Une *D-Brane géométrique* est un triplet (L, E, ∇_E) où L est une sous variété de dimension réelle p : $L \subset M$, E un fibré vectoriel et ∇_E une connexion sur E

Corde ouverte

Une corde ouverte d'origine (L, E, ∇_E) et d'extrémité (K, F, ∇_F) est une application X de $I = [0, 1]$ dans M avec $X(0) \in L$, $X(1) \in K$

Champ de corde ouverte associé

On appelle aussi "open string history", une application de la surface de Riemann "ouverte" $\Sigma = I \times \mathbb{R}$ dans M avec $X(0, t) \in L$ et $X(1, t) \in K$ ces champs seront des **courbes holomorphes** du côté A : **Coté symplectique**.

Pourquoi un fibré E et une connexion

Particules élémentaires

Une **particule élémentaire** est chargée par un champ de jauge pour l'électron c'est le champ de Maxwell de groupe $U(1)$, Pour un quark la charge est sa **couleur** : Champ de Yang Mills, donc on associe à une particule élémentaire un **fibré E** et sa **connexion associée**.

Pourquoi un fibré E et une connexion

Particules élémentaires

Une **particule élémentaire** est chargé par un champ de jauge pour l'électron c'est le champ de Maxwell de groupe $U(1)$, Pour un quark la charge est sa **couleur** : Champ de Yang Mills, donc on associe à une particule élémentaire un **fibré E** et sa **connexion associé**.

Cordes ouvertes

Par analogie, à chaque extrémités d'une corde ouverte, est associé le couple (E, ∇_E) . Dans l'histoire d'une particule, ou des extrémités d'une corde ouverte on est conduit à considérer l'holonomie de la connexion (application linéaire) de $E|_{\phi(t_1)}$ à $E|_{\phi(t_2)}$

Pourquoi un fibré E et une connexion

Facteur de Chan-Paton

On peut en identifiant N les branes entre elles, décrire les interactions entre cordes ouvertes. A l'origine d'une corde ouverte vivant sur la brane i , on spécifie la brane k d'arrivée. on obtient un indice dit de **Chan-Paton**. l'introduction de N branes introduit donc une théorie de jauge $U(N)$.

Cette théorie est ***non commutative*** dès que $n > 1$.

Le modèle standard a travers les branes

Facteur de Chan-Paton

On peut en identifiant N les branes entre elles, décrire les interactions entre cordes ouvertes. A l'origine d'une corde ouverte vivant sur la brane i , on spécifie la brane k d'arrivée. on obtient un indice dit de **Chan-Paton**. l'introduction de N branes introduit donc une théorie de jauge $U(N)$.

Cette théorie est ***non commutative*** dès que $n > 1$.

Exemple

Une brane est nécessaire pour décrire l'électromagnétique, au moins 2 le sont pour décrire des interactions faisant intervenir le groupe de jauge $SU(2)$. En jouant avec cela, on peut modéliser les différentes théories de jauge

Le modèle standard a travers les branes

Facteur de Chan-Paton

On peut en identifiant N les branes entre elles, décrire les interactions entre cordes ouvertes. A l'origine d'une corde ouverte vivant sur la brane i , on spécifie la brane k d'arrivée. on obtient un indice dit de **Chan-Paton**. l'introduction de N branes introduit donc une théorie de jauge $U(N)$.

Cette théorie est **non commutative** dès que $n > 1$.

Exemple

Une brane est nécessaire pour décrire l'électromagnétique, au moins 2 le sont pour décrire des interactions faisant intervenir le groupe de jauge $SU(2)$. En jouant avec cela, on peut modéliser les différentes théories de jauge

Retrouver les particules ?

Dans cette modélisation il faut envisager des **intersections de branes** : c'est cas où la longueur de la corde tend vers 0

III) Le Programme de Kontsevich (de 1994)

Rappel

Mathématiquement, La symétrie miroir consiste à échanger structure symplectique et structure complexe sur une variété miroir. Cela est bien visible sur la plus simple des variété complexe : le tore T^2

III) Le Programme de Kontsevich (de 1994)

Rappel

Mathématiquement, La symétrie miroir consiste à échanger structure symplectique et structure complexe sur une variété miroir. Cela est bien visible sur la plus simple des variété complexe : le tore T^2

Le tore Complexe

Soit (R_1, iR_2) un **tore complexe** (particulier), A son aire et $im(\tau)$ sa structure complexe, on sait que :

$(A, im(\tau)) = (R_1 R_2, R_1/R_2)$, le **tore Miroir** TM verifie alors

$(AM, im(\tau_M)) = (R_1/R_2, R_1 R_2)$ dans la transformation $R_2 \leftrightarrow 1/R_2$

-Ainsi on échange aire (structure **symplectique**) et structure **complexe** dans cette dualité.

-Un autre détail est important : dans cet échange on remarque que (**LCSL**) (**Large complex structure limit**) correspond à (**LVL**) (**Large volum limit**) sur la variété miroir

III) Le Programme de Kontsevich (de 1994)

Symétrie miroir des cordes ouvertes

Pour définir la symétrie miroir des cordes ouvertes, Kontsevich *catégorifie* l'échange complexe symplectique. Il invente la ***symétrie miroir homologique***

III) Le Programme de Kontsevich (de 1994)

Symétrie miroir des cordes ouvertes

Pour définir la symétrie miroir des cordes ouvertes, Kontsevich *catégorifie* l'échange complexe symplectique. Il invente la *symétrie miroir homologique*

Homological mirror symmetry

L'énoncé de Kontsevich en 1994 dit que :

There is an equivalence of categorie between The *bounded derived categorie of coherent sheaves* $D^b(X)$ on Calabi- Yau X and *Fukaya category* of its mirror MX

III) Le Programme de Kontsevich (de 1994)

Symétrie miroir des cordes ouvertes

Pour définir la symétrie miroir des cordes ouvertes, Kontsevich *catégorifie* l'échange complexe symplectique. Il invente la *symétrie miroir homologique*

Homological mirror symmetry

L'énoncé de Kontsevich en 1994 dit que :

There is an equivalence of categorie between The *bounded derived categorie of coherent sheaves* $D^b(X)$ on Calabi- Yau X and *Fukaya category* of its mirror MX

Explications

La suite de l'exposé (et probablement de beaucoup d'autres...), va consister à expliquer un peu ce qui se cache derrière tous ces termes.

IV) Toujours de la géométrie symplectique coté A...

Courbes holomorphes

On va toujours considérer dans ce contexte des courbes holomorphes mais maintenant, la surface de Riemann de départ sera une surface à ***bord non nul*** Nous allons décrire Plus précisément les courbes dans ce contexte.

IV) Toujours de la géométrie symplectique coté A...

Courbes holomorphes

On va toujours considérer dans ce contexte des courbes holomorphes mais maintenant, la surface de Riemann de départ sera une surface à **bord non nul** Nous allons décrire Plus précisément les courbes dans ce contexte.

Définition

Une **courbe holomorphe** (associé aux **lagrangiens** L_1, L_2) dans une variété symplectique (M, ω) est :

$u : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow M$ avec J structure presque complexe telle que :

$\bar{\partial}_J u = 0$ (Cauchy Riemann), $u(s, 0) \in L_0$, $u(s, 1) \in L_1$

$\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = p$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, t) = q$

IV) Toujours de la géométrie symplectique coté A...

Courbes holomorphes

On va toujours considérer dans ce contexte des courbes holomorphes mais maintenant, la surface de Riemann de départ sera une surface à **bord non nul** Nous allons décrire Plus précisément les courbes dans ce contexte.

Définition

Une **courbe holomorphe** (associé aux **lagrangiens** L_1, L_2) dans une variété symplectique (M, ω) est :

$u : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow M$ avec J structure presque complexe telle que :

$\bar{\partial}_J u = 0$ (Cauchy Riemann), $u(s, 0) \in L_0$, $u(s, 1) \in L_1$

$\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = p$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, t) = q$

De la géométrie énumérative ?

On peut rester du coté A et faire géométrie énumérative : **Comptage de courbes (disques holomorphes)** Ici l'option sera de catégorifier à partir de l'homologie de Floer et de trouver une catégorie équivalente coté B

Homologie de Floer

Homologie de Floer

Formellement la Théorie de **Floer** n'est rien d'autre que celle de **Morse** en dimension infinie (avec tous les problèmes que cela pose!) la variété de départ est remplacée par un espace de chemin. A la place de **points critiques**, on devra définir la notion de chemins critiques...

Homologie de Floer

Homologie de Floer

Formellement la Théorie de **Floer** n'est rien d'autre que celle de **Morse** en dimension infinie (avec tous les problèmes que cela pose!) la variété de départ est remplacée par un espace de chemin. A la place de **points critiques**, on devra définir la notion de chemins critiques...

Fonctionnelle de Floer

Soit $\mathcal{P}(L_0, L_1)$ l'espace des chemins d'extrémités dans les deux lagrangiennes citées ; On définit alors une fonctionnelle de l'espace des (homotopies à *) de chemins γ dans \mathbb{R} :

$$(\gamma, [u]) \rightarrow \int_{[0,1]^2} u^* \omega$$

cette quantité représente l'**aire symplectique** qui remplace la fonction hauteur de la théorie de morse.

La différentielle de l'expression précédente est $d\mathcal{A}.V = \int_{[0,1]} \omega(\dot{\gamma}, V) dt$:
Les **points critiques** sont les chemins constants (immédiat).

Les trajectoires du gradient sont des applications **J-holomorphes**

Rappel sur la théorie (et l'homologie) de Morse

Définition

On considère M une variété compacte et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que f est une **fonction de Morse** si tout ses **points critiques** sont **non dégénérés**. On ment un peu (il faut faire cela au travers de cartes)

Rappel sur la théorie (et l'homologie) de Morse

Définition

On considère M une variété compacte et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que f est une **fonction de Morse** si tous ses **points critiques** sont **non dégénérés**. On ment un peu (il faut faire cela au travers de cartes)

Indice d'un point critique

On compte le **nombre** de valeurs propres négatives de la forme quadratique au voisinage du point critique, cela représente l'**indice** du point critique.

Rappel sur la théorie (et l'homologie) de Morse

Définition

On considère M une variété compacte et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que f est une **fonction de Morse** si tous ses **points critiques** sont **non dégénérés**. On ment un peu (il faut faire cela au travers de cartes)

Indice d'un point critique

On compte le **nombre** de valeurs propres négatives de la forme quadratique au voisinage du point critique, cela représente l'**indice** du point critique.

Flot du gradient

L'équation différentielle : $\dot{u} = -\text{grad}(f(u))$ est une équation différentielle ordinaire, son flot φ_t est **le flot du gradient** de f .

Rappel sur la théorie (et l'homologie) de Morse

Variétés stables et instables en x

On peut alors construire :

$$W^s(x, f) = \{z \in M / \lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi_t(z) = x\}$$

$$W^u(x, f) = \{z \in M / \lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi_t(z) = x\}$$

Ce sont respectivement les variétés **stables** et **instables** du point critique.

Rappel sur la théorie (et l'homologie) de Morse

Variétés stables et instables en x

On peut alors construire :

$$W^s(x, f) = \{z \in M / \lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi_t(z) = x\}$$

$$W^u(x, f) = \{z \in M / \lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi_t(z) = x\}$$

Ce sont respectivement les variétés **stables** et **instables** du point critique.

Théorème

On pose $\mathcal{M}(y, x, f) = W^s(x, f) \cap W^u(y, f)$ on peut montrer que :

(1) $Ind_f(x) = \dim W^u(x, f)$

(2) $\dim \mathcal{M}(y, x, f) = Ind_f(y) - Ind_f(x)$

Rappel sur la théorie (et l'homologie) de Morse

Variétés stables et instables en x

On peut alors construire :

$$W^s(x, f) = \{z \in M / \lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi_t(z) = x\}$$

$$W^u(x, f) = \{z \in M / \lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi_t(z) = x\}$$

Ce sont respectivement les variétés **stables** et **instables** du point critique.

Théorème

On pose $\mathcal{M}(y, x, f) = W^s(x, f) \cap W^u(y, f)$ on peut montrer que :

$$(1) \text{Ind}_f(x) = \dim W^u(x, f)$$

$$(2) \dim \mathcal{M}(y, x, f) = \text{Ind}_f(y) - \text{Ind}_f(x)$$

Exemple : la sphère

On note a le minimum, b le maximum, on a :

$$W^s(a, f) \cap W^u(b, f) = (S^2 - \{a\}) \cap (S^2 - \{b\})$$

On a donc bien : $\dim \mathcal{M}(b, a, f) = \text{Ind}_f(b) - \text{Ind}_f(a) = 2$

Rappel sur la théorie (et l'homologie) de Morse

Exemple 2 : la sphère à deux bosses

On note c, d , ($d > c$) les extremum, b col et a le minimum :

On voit sans mal : $W^s(a, f) \cap W^u(c, f)$ est une surface (intersection de surfaces)

On a encore : $\dim \mathcal{M}(d, a, f) = \text{Ind}_f(d) - \text{Ind}_f(a) = 2$ (Attention ce n'est pas un ***invariant topologique***)

Rappel sur la théorie (et l'homologie) de Morse

Exemple 2 : la sphère à deux bosses

On note c, d , ($d > c$) les extremum, b col et a le minimum :

On voit sans mal : $W^s(a, f) \cap W^u(c, f)$ est une surface (intersection de surfaces)

On a encore : $\dim \mathcal{M}(d, a, f) = \text{Ind}_f(d) - \text{Ind}_f(a) = 2$ (Attention ce n'est pas un ***invariant topologique***)

Et pour d'autres surfaces ?

Pour le tore c'est déjà un peu compliqué de trouver les variétés stables et instables, on peut essayer d'automatiser : définir un complexe de chaîne, faire de l'homologie !

Rappel sur la théorie (et l'homologie) de Morse

Exemple 2 : la sphère à deux bosses

On note c, d , ($d > c$) les extremum, b col et a le minimum :

On voit sans mal : $W^s(a, f) \cap W^u(c, f)$ est une surface (intersection de surfaces)

On a encore : $\dim \mathcal{M}(d, a, f) = \text{Ind}_f(d) - \text{Ind}_f(a) = 2$ (Attention ce n'est pas un ***invariant topologique***)

Et pour d'autres surfaces ?

Pour le tore c'est déjà un peu compliqué de trouver les variétés stables et instables, on peut essayer d'automatiser : définir un ***complexe de chaîne***, faire de l'homologie !

Une action de groupe

le groupe \mathbb{R} opère librement (si $a \neq b$) sur $\mathcal{M}(a, b, f)$ Le quotient est donc une variété $\mathcal{L}(a, b)$ de dimension : $\text{Ind}_f(a) - \text{Ind}_f(b) - 1$

Homologie de Morse

Définition du complexe de chaîne

On définit $C_k = \{\sum_{c \in \text{Crit}_k(f)} a_c c / a_c \in \mathbb{Z}_2\}$,

où $\text{Crit}_k(f)$ désigne l'ensemble des points critiques de **degré** k

Homologie de Morse

Définition du complexe de chaîne

On définit $C_k = \{\sum_{c \in \text{Crit}_k(f)} a_c c / a_c \in \mathbb{Z}_2\}$,

où $\text{Crit}_k(f)$ désigne l'ensemble des points critiques de **degré** k

La différentielle

On pose $\partial a = \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n(a, b) b$, où $n(a, b)$ est **le nombre modulo 2** de trajectoires allant de a à b (dans ce cas $\dim \mathcal{L}(a, b) = 0$)

Homologie de Morse

Définition du complexe de chaîne

On définit $C_k = \{\sum_{c \in \text{Crit}_k(f)} a_c c / a_c \in \mathbb{Z}_2\}$,
où $\text{Crit}_k(f)$ désigne l'ensemble des points critiques de **degré** k

La différentielle

On pose $\partial a = \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n(a, b) b$, où $n(a, b)$ est **le nombre modulo 2**
de trajectoires allant de a à b (dans ce cas $\dim \mathcal{L}(a, b) = 0$)

$$\partial \circ \partial = 0$$

Dans ce cas $\dim \mathcal{L}(a, b) = 1$) le bord contient alors les deux points critiques
intérmédiaires ou 0 et on calcule modulo 2 : on vient de définir un **complexe
de chaînes**.

Calcul d'homologie de Morse

Sphère

On définit $\mathcal{C}_k(f) = \{\sum_{c \in \text{Crit}_k(f)} a_c c / c \in \mathbb{Z}_2\}$,
où $\text{Crit}_k(f)$ désigne l'ensemble des points critiques de **degré** k

La différentielle

On pose $\partial a = \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n(a, b) b$, où $n(a, b)$ est **le nombre** de trajectoires allant de a à b (dans ce cas $\dim \mathcal{L}(a, b) = 0$)

$\partial \circ \partial = 0$

Dans ce cas $\dim \mathcal{L}(a, b) = 1$) le bord contient alors les deux points critiques intermédiaires ou 0 et on calcule modulo 2 : on vient de définir un **complexe de chaînes**.

$$\dots \longrightarrow \mathcal{C}_n(f) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(f) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathcal{C}_{n-2}(f) \dots \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(f) \longrightarrow 0$$

Les **groupes d'homologies** sont :

$$H_k = \text{Ker} \partial_k / \text{Im} \partial_{k+1}$$

Exemples

Sphère

On a

$$\mathcal{C}_2(f) \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1(f) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(f) \text{ soit : } \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial_2} 0 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}_2$$

On en déduit : $H_2 = \mathbb{Z}_2$, $H_1 = 0$, $H_0 = \mathbb{Z}_2$

Exemples

Sphère

On a

$$\mathcal{C}_2(f) \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1(f) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(f) \text{ soit : } \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial_2} 0 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}_2$$

On en déduit : $H_2 = \mathbb{Z}_2$, $H_1 = 0$, $H_0 = \mathbb{Z}_2$

Sphère à deux bosses

On a

$$\mathcal{C}_2(f) \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1(f) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(f) \text{ soit : } \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}_2$$

avec : $\partial c = \partial d = b$, $\partial b = 2a = 0$

On en déduit : $H_2 = \mathbb{Z}_2$, $H_1 = 0$, $H_0 = \mathbb{Z}_2$: L'homologie est **la même**.

Exemples

Sphère

On a

$$C_2(f) \xrightarrow{\partial_2} C_1(f) \xrightarrow{\partial_1} C_0(f) \text{ soit : } \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial_2} 0 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}_2$$

On en déduit : $H_2 = \mathbb{Z}_2$, $H_1 = 0$, $H_0 = \mathbb{Z}_2$

Sphère à deux bosses

On a

$$C_2(f) \xrightarrow{\partial_2} C_1(f) \xrightarrow{\partial_1} C_0(f) \text{ soit : } \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}_2$$

avec : $\partial c = \partial d = b$, $\partial b = 2a = 0$

On en déduit : $H_2 = \mathbb{Z}_2$, $H_1 = 0$, $H_0 = \mathbb{Z}_2$: L'homologie est **la même**.

Tore

On a

$$C_2(f) \xrightarrow{\partial_2} C_1(f) \xrightarrow{\partial_1} C_0(f) \text{ soit : } \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}_2$$

avec : $\partial d = 2b + 2c = 0$, $\partial b = \partial c = 2a = 0$

On en déduit : $H_2 = \mathbb{Z}_2$, $H_1 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $H_0 = \mathbb{Z}_2$:

Retour à l'homologie de Floer

Fonctionnelle de Floer

Soit $\mathcal{P}(L_0, L_1)$ l'espace des chemins d'extrémités dans deux lagrangiennes L_0, L_1 ; On rappelle que les trajectoires du gradient de $(\gamma, [u]) \rightarrow \int_{[0,1]^2} u^* \omega$ sont les solutions de l'équation de Cauchy-Riemann donc des courbes holomorphes. Il faut étudier le module des courbes holomorphes dans ce contexte.

Retour à l'homologie de Floer

Fonctionnelle de Floer

Soit $\mathcal{P}(L_0, L_1)$ l'espace des chemins d'extrémités dans deux lagrangiennes L_0, L_1 ; On rappelle que les trajectoires du gradient de $(\gamma, [u]) \rightarrow \int_{[0,1]^2} u^* \omega$ sont les solutions de l'équation de Cauchy-Riemann donc des courbes holomorphes. Il faut étudier le module des courbes holomorphes dans ce contexte.

Rappel

Une **courbe holomorphe**, Ici **holomorphic disc**, associé aux lagrangiens L_1, L_2 dans une variété symplectique (M, ω) est :

$u : \mathbb{R} \times [0, 1]$ avec J structure presque complexe telle que :

$\bar{\partial}_J u = 0$ (Cauchy Riemann), $u(s, 0) \in L_0, u(s, 1) \in L_1$

$\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = p, \lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, t) = q$

$\int u^* \omega = \int \int \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2$ désigne aussi l'**énergie** de la courbe u .

Retour à l'homologie de Floer

Espace de module

On considère l'espace $\mathcal{M}(p, q, [u], J) = \{u : \text{holomorphic}\}$. c'est exactement l'équivalent de $\mathcal{M}(b, a, f)$ en homologie de Morse, les points critiques sont ici les **points d'intersections** des lagrangiennes Mais ce n'est plus une bonne variété à cause de la dimension infinie. C'est un espace affreux : un espace de module. on va évacuer toutes les difficultés...

Retour à l'homologie de Floer

Espace de module

On considère l'espace $\mathcal{M}(p, q, [u], J) = \{u : \text{holomorphic}\}$. c'est exactement l'équivalent de $\mathcal{M}(b, a, f)$ en homologie de Morse, les points critiques sont ici les **points d'intersections** des lagrangiennes Mais ce n'est plus une bonne variété à cause de la dimension infinie. C'est un espace affreux : un espace de module. on va évacuer toutes les difficultés...

Dimension

Si on évacue les problèmes de convergence, compacité (phénomènes de bulles...) la dimension de cet espace attendu est l'**indice de Maslov**.

Retour à l'homologie de Floer

Espace de module

On considère l'espace $\mathcal{M}(p, q, [u], J) = \{u : \text{holomorphic}\}$. c'est exactement l'équivalent de $\mathcal{M}(b, a, f)$ en homologie de Morse, les points critiques sont ici les **points d'intersections** des lagrangiennes Mais ce n'est plus une bonne variété à cause de la dimension infinie. C'est un espace affreux : un espace de module. on va évacuer toutes les difficultés...

Dimension

Si on évacue les problèmes de convergence, compacité (phénomènes de bulles...) la dimension de cet espace attendu est l'**indice de Maslov**.

Indice de Maslov

Soit $L_1(t)$ un chemin entre les deux Lagrangiennes L_0, L_1 . L'indice de Maslov du chemin $L_1(t)$ est le nombre de fois où $L_1(t)$ n'est pas **transverse** à L_0 (on compte avec signes et multiplicités).

Retour à l'homologie de Floer

Complexe de Floer

$CF(L_0, L_1) = \Lambda^{|L_0 \cap L_1|}$, module libre généré par les points d'intersections des deux lagrangiennes L_0 et L_1 , on définit une différentielle :

$$\partial p = \sum_{\deg(q) = \deg(p) - 1} (\#\mathcal{M}(p, q, [u], J) / \mathbb{R}) T \int u^* \omega q$$

Retour à l'homologie de Floer

Complexe de Floer

$CF(L_0, L_1) = \Lambda^{|L_0 \cap L_1|}$, module libre généré par les points d'intersections des deux lagrangiennes L_0 et L_1 , on définit une différentielle :

$$\partial p = \sum_{\deg(q) = \deg(p) - 1} (\#\mathcal{M}(p, q, [u], J)/\mathbb{R}) T \int u^* \omega q$$

$$\partial^2 = 0$$

Comme en homologie de Morse, on montre que ∂ définit un complexe : les trajectoires brisées $\coprod_{r \in L_0 \cap L_1} (\mathcal{M}(p, r, [u], J)/\mathbb{R}) \times (\mathcal{M}(r, q, [u], J)/\mathbb{R})$ compactifie un espace de dimension 1 donc ajoute un **nombre paire** de points au bord : le carré du bord est donc nul

Remarque : dans le cas lagrangiennes exactes, on peut éviter $T \int u^* \omega$ et travailler modulo 2, exactement comme dans Morse, cool !

Retour à l'homologie de Floer

Complexe de Floer

$CF(L_0, L_1) = \Lambda^{|L_0 \cap L_1|}$, module libre généré par les points d'intersections des deux lagrangiennes L_0 et L_1 , on définit une différentielle :

$$\partial p = \sum_{\deg(q) = \deg(p) - 1} (\#\mathcal{M}(p, q, [u], J)/\mathbb{R}) T \int u^* \omega q$$

$$\partial^2 = 0$$

Comme en homologie de Morse, on montre que ∂ définit un complexe : les trajectoires brisées $\coprod_{r \in L_0 \cap L_1} (\mathcal{M}(p, r, [u], J)/\mathbb{R}) \times (\mathcal{M}(r, q, [u], J)/\mathbb{R})$ compactifie un espace de dimension 1 donc ajoute un **nombre paire** de points au bord : le carré du bord est donc nul

Remarque : dans le cas lagrangiennes exactes, on peut éviter $T \int u^* \omega$ et travailler modulo 2, exactement comme dans Morse, cool !

Complexe de Floer

On vient de définir le complexe de Floer ! Le physicien pourra y voir une homologie gérant les points d'intersections des branes...

Catégorification de l'homologie de Floer

Structure produit

On peut définir une **structure produit** sur les complexes de Floer :

$$CF^*(L_0, L_1) \otimes CF^*(L_1, L_2) \rightarrow CF^*(L_0, L_2)$$

L'espace de module sera $\mathcal{M}(p, q, r, [u], J)$ de dimension $\text{degr} - (\text{dep} + \text{degr})$

Le produit : $p \cdot q = \sum_{r, \text{deg}(r) = \text{deg}(p) + \text{deg}(q)} (\#\mathcal{M}(p, q, r, [u], J) / \mathbb{R}) T^{\int u^* \omega} r$

on peut ré itérer :

$$CF^*(L_0, L_1) \otimes CF^*(L_1, L_2) \dots \otimes CF^*(L_{n-1}, L_n) \rightarrow CF^*(L_0, L_n)$$

Catégorification de l'homologie de Floer

Structure produit

On peut définir une **structure produit** sur les complexes de Floer :

$$CF^*(L_0, L_1) \otimes CF^*(L_1, L_2) \rightarrow CF^*(L_0, L_2)$$

L'espace de module sera $\mathcal{M}(p, q, r, [u], J)$ de dimension $\text{degr} - (\text{dep} + \text{degr})$

Le produit : $p \cdot q = \sum_{r, \text{deg}(r) = \text{deg}(p) + \text{deg}(q)} (\#\mathcal{M}(p, q, r, [u], J) / \mathbb{R}) T^{\int u^* \omega} q$
on peut réitérer :

$$CF^*(L_0, L_1) \otimes CF^*(L_1, L_2) \dots \otimes CF^*(L_{n-1}, L_n) \rightarrow CF^*(L_0, L_n)$$

catégorie de Fukaya

On peut alors définir une ∞ -**catégorie** dont les **objets** sont les lagrangiennes, les **morphismes** les complexes de Floer, et des **opérations algébriques** sur les complexes comme on a donné en exemple. On vient de catégorifier le côté symplectique.

V) Et de la géométrie complexe du côté B...

Géométrie complexe

De ce côté on a déjà vu que domine la géométrie complexe. sa catégorification va conduire à définir la ***catégorie des faisceaux cohérents***. Nous ne pouvons donner ici plus de détails.

V) Et de la géométrie complexe du côté B...

Géométrie complexe

De ce côté on a déjà vu que domine la géométrie complexe. sa catégorification va conduire à définir la **catégorie des faisceaux cohérents**. Nous ne pouvons donner ici plus de détails.

Mirror map

Comme dans le cas des cordes fermées, il s'agira de définir une **application miroir** permettant de passer du côté B au côté A.

V) Et de la géométrie complexe du côté B...

Géométrie complexe

De ce côté on a déjà vu que domine la géométrie complexe. sa catégorification va conduire à définir la **catégorie des faisceaux cohérents**. Nous ne pouvons donner ici plus de détails.

Mirror map

Comme dans le cas des cordes fermées, il s'agira de définir une **application miroir** permettant de passer du côté B au côté A.

Un exemple

Un cas où cette **équivalence de catégorie** est **prouvée** est celui des **courbes elliptiques**. Il faut traduire lagrangienne en faisceau cohérent, et montrer que les morphismes, les opérations dans les deux catégories se correspondent

VI) Cas du tore, un exemple illustratif! : Coté A

Lagrangiennes du tore

Pour le tore symplectique on considère trois lagrangiennes de pentes respectives, 0, 1, 2 notées respectivement \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , On peut alors définir **le produit** dans la catégorie de Fukaya : "le pantalon" dans l'axiomatique de la **TQFT d'Atiyah**

On a : $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}_1 = p_{01}$, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = p_{12}$, $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}_2 = \{p_{01}, q_{02}\}$

VI) Cas du tore, un exemple illustratif! : Coté A

Lagrangiennes du tore

Pour le tore symplectique on considère trois lagrangiennes de pentes respectives, 0, 1, 2 notées respectivement \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 . On peut alors définir **le produit** dans la catégorie de Fukaya : "le pantalon" dans l'axiomatique de la **TQFT d'Atiyah**

On a : $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}_1 = p_{01}$, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = p_{12}$, $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}_2 = \{p_{01}, q_{02}\}$

Produit coté symplectique (symplectic Pant)

$$\begin{aligned} CF^*(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1) \otimes CF^*(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) &\rightarrow CF^*(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_2) \\ p_{01} \otimes p_{12} &\rightarrow C_{ppp} p_{02} + C_{ppq} q_{02} \end{aligned}$$

avec $C_{ppp} = \sum_{\mathbb{Z}} e^{i\pi 2\tau n^2}$, $C_{ppq} = \sum_{\mathbb{Z}} e^{i\pi 2\tau (n+1/2)^2}$ On somme sur les **aires des triangles**, (ppp : entier, ppq entier + 1/2)

VI) Cas du tore, un exemple illustratif! : Coté A

Lagrangiennes du tore

Pour le tore symplectique on considère trois lagrangiennes de pentes respectives, 0, 1, 2 notées respectivement \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 . On peut alors définir **le produit** dans la catégorie de Fukaya : "le pantalon" dans l'axiomatique de la **TQFT d'Atiyah**

On a : $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}_1 = p_{01}$, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = p_{12}$, $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}_2 = \{p_{01}, q_{02}\}$

Produit coté symplectique (symplectic Pant)

$$\begin{aligned} CF^*(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1) \otimes CF^*(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) &\rightarrow CF^*(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_2) \\ p_{01} \otimes p_{12} &\rightarrow C_{ppp} p_{02} + C_{ppq} q_{02} \end{aligned}$$

avec $C_{ppp} = \sum_{\mathbb{Z}} e^{i\pi 2\tau n^2}$, $C_{ppq} = \sum_{\mathbb{Z}} e^{i\pi 2\tau (n+1/2)^2}$ On somme sur les **aires des triangles**, (ppp : entier, ppq entier + 1/2)

Correspondance

Il faut a travers une application miroir, traduire cela en quelque chose d'équivalent du coté B.

Fibrés holomorphes sur le tore, fonction théta

Sections et fonction théta

Les **sections** d'un fibré en droites holomorphes sur le tore sont données par la **fonction théta** :

$$\Theta[a, b](\tau, z) = \sum_{\mathbb{Z}} e^{i\pi\tau(n+a)^2 + 2i\pi\tau(n+a)(z+b)}$$

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow L_0 \simeq \mathcal{O}, \mathcal{L}_1 \rightarrow L_1 \simeq \mathcal{O}(1), \mathcal{L}_2 \rightarrow L_2 \simeq \mathcal{O}(2)$$

Fibrés holomorphes sur le tore, fonction théta

Sections et fonction théta

Les **sections** d'un fibré en droites holomorphes sur le tore sont données par la **fonction théta** :

$$\Theta[a, b](\tau, z) = \sum_{\mathbb{Z}} e^{i\pi\tau(n+a)^2 + 2i\pi\tau(n+a)(z+b)}$$

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow L_0 \simeq \mathcal{O}, \mathcal{L}_1 \rightarrow L_1 \simeq \mathcal{O}(1), \mathcal{L}_2 \rightarrow L_2 \simeq \mathcal{O}(2)$$

Produit coté complexe (Complex pant)

On a : $\text{Hom}^0(\mathcal{O}, L_1) = \text{Hom}^0(L_1, L_2) = H^0(L_1)$, $\text{Hom}^0(\mathcal{O}, L_2) = H^0(L_2)$
d'où

$$\begin{aligned} \text{Hom}^0(L_0, L_1) \otimes \text{Hom}^0(L_1, L_2) &\rightarrow \text{Hom}^0(L_0, L_2) \\ \Theta[0, 0](\tau, z) \otimes \Theta[0, 0](\tau, z) &\rightarrow \Theta[0, 0](2\tau, 0) \cdot \Theta[0, 0](2\tau, 2z) \\ &\quad + \Theta[1/2, 0](2\tau, 0) \cdot \Theta[1/2, 0](2\tau, 2z) \end{aligned}$$

Fibrés holomorphes sur le tore, fonction thêta

Sections et fonction thêta

Les **sections** d'un fibré en droites holomorphes sur le tore sont données par la **fonction thêta** :

$$\Theta[a, b](\tau, z) = \sum_{\mathbb{Z}} e^{i\pi\tau(n+a)^2 + 2i\pi\tau(n+a)(z+b)}$$

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow L_0 \simeq \mathcal{O}, \mathcal{L}_1 \rightarrow L_1 \simeq \mathcal{O}(1), \mathcal{L}_2 \rightarrow L_2 \simeq \mathcal{O}(2)$$

Produit coté complexe (Complex part)

On a : $\text{Hom}^0(\mathcal{O}, L_1) = \text{Hom}^0(L_1, L_2) = H^0(L_1)$, $\text{Hom}^0(\mathcal{O}, L_2) = H^0(L_2)$




d'où

$$\begin{aligned} \text{Hom}^0(L_0, L_1) \otimes \text{Hom}^0(L_1, L_2) &\rightarrow \text{Hom}^0(L_0, L_2) \\ \Theta[0, 0](\tau, z) \otimes \Theta[0, 0](\tau, z) &\rightarrow \Theta[0, 0](2\tau, 0) \cdot \Theta[0, 0](2\tau, 2z) \\ &+ \Theta[1/2, 0](2\tau, 0) \cdot \Theta[1/2, 0](2\tau, 2z) \end{aligned}$$

HMS for elliptic curves

Ce programme a été conjecturé en 1994 par Kontsevich, Pour les details voir l'article de A. Polishchuk and E. Zaslow

VII) Références

-  P.S. Aspinwall et al *Dirichlet branes and mirror symmetry*, AMS, 2009
-  A. Polishchuk and E. Zaslow *Categorical mirror symmetry : The Elliptic curve*, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 443 (1998)
-  K.Hori, S. Katz, A. Klem, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, E. Zaslow, *Mirror symmetry*, AMS, 2003. Press.