CNAM GEII première année
Mathématiques Cours 9 :
Fonction Logarithme et exponentielle

Janvier 2012

1 Définition de la fonction Logarithme

Dans la table des primitive il y a une place vacante : il n'existe pas de primitive rationnelle pour la foction inverse. On apppelle fonction logarithme népèrien la primitive de la fonction inverse qui s'annule en $x = 1$ définie sur $\mathbb{R}^{*,+}$:
$ln(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t}$

1.1 Propriété de la fonction Logarithme

ln est une fonction croissante : en effet sa dérivée est positive sur son ensemble de définition.

$\underline{ln(ab) = lna + lnb}$ En effet : posons $b = x$:
$(ln(ax))' = \dfrac{a}{ax} = (lnx)'$ Donc $ln(ax) = lnx + C$ mais comme $ln1 = 0$, on en déduit $C = lna$

On a donc bien en $ln(ab) = lna + lnb$

$\underline{ln(\dfrac{a}{b}) = lna - lnb}$, il suffit de montrer que $ln\frac{1}{x} = -lnx$:

$ln1 = ln(x.\frac{1}{x})$ $=ln(x) + ln(\frac{1}{x})$ d'ou le resultat.

1.2 Calcul de limites

On les propriétés suivantes :

1. $\lim_{x \to +\infty} lnx = +\infty$
   Il suffit de remarquer qu'il existe un entier n tel que $2^{n-1} < x < 2^n$ donc comme ln est croissante, $ln(2^{n-1}) < lnx < ln(2^n)$ d'où : $(n-1).ln(2) < lnx < n.ln(2)$
   Comme x tend vers + l'infini il en est de même pour n. On en déduit le résultat.
2. $\lim_{x \to 0^+} lnx = -\infty$
   Il suffit de poser $X = \frac{1}{x}$
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$
   Il suffit de montrer $ln(x) \leq 2\sqrt{x}$ sur $]1, +\infty[$ Cela se montre en étudiant la fonction auxiliaire : $f(x) = ln(x) - 2\sqrt{x}$

2 Fonction exponentielle

La fonction logarithme est strictement croissante sur son ensemble de définition.Par conséquent, elle admet une fonction réciproque ; c'est par définition la fonction exponentielle, Exp définie donc sur $\mathbb{R}$ et a valeur dans $\mathbb{R}^{*,+}$

2.1 Propriété de la fonction exponentielle

Exp est une fonction croissante : Comme fonction réciproque d'une fonction croissante.

$\underline{Exp(a+b) = Exp(a).Exp(b)}$ En effet :Posons $a = LnA, b = lnB$,
$ln(Exp(a+b)) = a + b = lnA + lnB = lnA.B = ln(Exp(a).Exp(b))$
On a donc bien en $Exp(a+b) = Exp(a).Exp(b$
$\underline{Exp(a-b) = Exp(a).Exp(b)}$, Il suffit de montrer que $Exp(0) = 1$ ce qui est immédiat :

Cela justifie que l'on prenne une notation de l'exponentielle sous forme de puissance : $Exp(x) = e^x$

2.2 Calcul de limites

On les propriétés suivantes :

1. $\lim_{x \to +\infty} Exp(x) = +\infty$
   Il suffit de remarquer que $ln(Exp(x)) = x < Exp(x)$ et comme x tend vers l'infini on a le résultat.
   On en déduit immédiatement le résultat ci dessous.
2. $\lim_{x \to -\infty} Exp(x) = 0^+$
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
   Il suffit de calculer celle de $ln(\frac{e^x}{x}) = x - ln(x)$ on voit sans peine que cette limite est infinie d'ou le resultat.

2.3 Dérivée de la fonction exponentielle

On utilise la dérivée de la fonction réciproque on trouve :
(Exp(x))'= Exp(x) Cela est laissé en exercice.