

CNAM GEII première année  
Mathématiques Cours 7 :  
Fonctions numériques études des branches infinies

---

novembre 2011

## 1 Comportement asymptotique

On voudrais connaitre avec le plus de précision possible le comportement d'une fonction numérique  $f$ , quand  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ .

### 1.1 Branches paraboliques

Pour simplifier l'exposition on supposera partout que l'on observe  $f$  au voisinage de plus l'infini et que  $f(x)$  tend vers plus l'infini.

Un premier cas de figure à examiner quand  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . est  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

1. Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  on a une branche parabolique de direction  $Oy$
2. Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  on a une branche parabolique de direction  $Ox$
3. Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  on a une branche parabolique de direction  $y = ax$   
ou une asymptote  $y = ax + b$

#### Preuve rapide

On peut se convaincre assez facilement de ce resultat, en effet le rapport  $\frac{f(x)}{x}$  peut être vu comme la pente (taux d'accroissement) de la droite qui passe

par l'origine et le point courant  $M(x, f(x))$  sur la courbe ; Dans le premier cas quand  $x$  augmente la droite  $(OM)$  s'approche de l'axe  $Oy$ , dans le second de l'axe  $Ox$

Le cas plus délicat est le troisième cas : Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = +\infty$ , on aura une branche parabolique de direction  $y = ax$ . En revanche, si cette limite est finie on aura une asymptote ; détaillons ce dernier point :

## 1.2 Asymptotes obliques

Dans le cas où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$ , la courbe possède une asymptote oblique : la droite d'équation  $y = ax + b$  On peut encore apporter une précision :

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b^+$ , la courbe est au dessus de l'asymptote. Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b^-$ , la courbe est au dessous de l'asymptote.

## 2 Etude d'exemples