CNAM GEII première année Mathématiques Cours 4 : Fonctions numériques

novembre 2011

1 Fonctions numériques introduction

Une fonction numérique peut être définie par une formule (mais cela n'est pas obligatoire). Dans le cas ous la fonction numérique est définie par une formule, il faut s'assurer que cette formule a toujours un sens. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, la racine carré d'un nombre négatif n'a aucun sens.

1.1 Ensemble de définition

Une fonction numérique définie par une formule est un procédé qui étant donnée une valeur x réelle donne un resultat unique noté $f(x)$ $f(x)$ est une formule fabriquée a l'aide des fonctions mathématiques de bases : fonctions polynômes, rationnelles, trigonométriques...

Définition
L'ensemble de définition de la fonction f noté D_f est l'ensemble des valeurs x pour lesquelle la fonction est définie.

Exemple
Posons $f(x) = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{x - 3}$
Cette fonction est définie pour $16-x^2$ positif et $x \neq 3$, On a : $D_f = [4, 3[\bigcup]3, 4]$

1.2 Parité, periodicité

On peut simplifier l'étude d'une fonction numérique, si on remarque que son graphe possède certaines symétries.

Parité

On dit qu'une fonction est **paire** si son graphe est **symétrique** par rapport à l'**axe des ordonnées**. Algébriquement, cela signifie que pour tout x appartenant à l'ensemble de définition, $f(x) = f(-x)$

Une fonction est **impaire** si son graphe est **symétrique** par rapport à l'**origine** ce qui signifie $f(x) = -f(-x)$

Periodicité

On dit qu'une fonction est périodique si son graphe est **invariant** par **translation horizontale** et cela signifie qu'il existe un nombre réel T tel que pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f, $f(x+T) = f(x)$

2 Limites et continuité

Une fois définie l'ensemble de définition d'une fonction, il est naturel de chercher à savoir comment se comporte une fonction aux bornes de cet ensemble. Si cet ensemble n'est pas borné, on est interessé par le comportement de f aux borne de l'ensemble de définition ; on est doit calculer des "limites"

2.1 Calcul de limites

On va donner une définition rigoureuse de la notion de limite en un point fini ou infini vers une quantité finie ou infinie On peut se convaincre de la pertinence de ces définition théoriques a l'aide d'une figure :

Définition

On dit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ quand : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

On dit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ quand : $\forall \varepsilon > 0, \exists A, x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

On dit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ quand : $\forall A > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$

On dit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ quand : $\forall A > 0, \exists B > 0, x > B \Rightarrow f(x) > A$

Calculs pratiques

Calcul de la limite d'une fraction rationnelle au voisinage de l'infini :

Soit $f(x) = \dfrac{a_n x^n + ... + a_0}{b_p x^p + ... b_0}$ une fraction rationnelle.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ quand le degré du numérateur est supérieur a celui du dénominateur.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_n}$ quand le degré du numérateur est égal a celui du dénominateur.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ quand le degré du numérateur est inférieur a celui du dénominateur.

Opération sur les limites

La plupart du temps le calcul des limites obeit aux règles du calcul algébrique : on a les résultats suivants α : représentant une valeur finie ou infinie, on a :
$\lim_{x \to \alpha} f(x) = l, \lim_{x \to \alpha} g(x) = l'$ entrainent :

$\lim_{x \to \alpha} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda l + \mu l'$
$\lim_{x \to \alpha} f(x) g(x) = l l'$
$\lim_{x \to \alpha} f(x)/g(x) = l/l'$ (si α est dans le domaine de définition de g)

Formes indeterminées

Dans le cas ou la limite vaut 0 ou l'infini, il faut faire attention aux formes indeterminées et lever l'indetermination dans le calcul des limites :
$0 \times \infty, \infty - \infty, \dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$, sont des formes indeterminées, par contre
$\dfrac{0}{\infty}, \dfrac{\infty}{0}$ sont determinées !

Calcul de limites dans la pratique

Concrètement quand on se trouve a calculer des limites, on commence par se servir des règles de bases que sont : somme, produit quotient, si cela ne suffit pas (cas des formes indeterminées) on tente de lever l'indetermination par différentes méthodes : factorisation, multiplication par la quantité conjugé développements limités.

2.2 Continuité d'une fonction

On va définir maintenant la continuité d'une fonction en un point, et sur un intervalle

Continuité en un point

On dit que f est continue au point x_0 quand $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, cela s'écrit :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Cette définition est parfois difficile a manipuler et requière la maitrise des majorations dans les inégalités.

Continuité sur un intervalle

on dit que f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I

Opérations sur les fonctions continues

En utilisant les résultats sur les limites, on montre très simplement que la somme le produit, le quotient de fonctions continues en x_0 est continue là où elles sont définies.

2.3 Composition des fonctions

La composition de deux fonctions est définie par :
$x \in D_f \mapsto f(x) \in f(D_f) \mapsto g(f(x)) \in g(f(D_f))$
On note $g \circ f(x) = g(f(x))$ la composé des fonctions f et g

Ensemble de définition de la composée

Il faut d'abord que $f(x)$ soit définie, ensuite il faut que $g(f(x))$ existe donc cela exige que $f(x)$ soit dans le domaine de définition de la fonction g :
$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \text{ tel que } f(x) \in D_g\}$

Limites et composée

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to l} g(x) = l'$ alors :
$\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = l'$

Continuité de la fonction composée

Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors : $g \circ f$ est continue au point $f(x_0)$