

Seminaire d'analyse de Caen
La Géométrie des cordes, les modèles A et B de
Witten
Le modèle A et la géométrie énumérative

Ph Durand

Avril 2010

1 Introduction

Le lien intime qui relie la géométrie moderne et la physique est découvert par Einstein à partir de l'élégante formulation de la relativité générale. Les acteurs principaux sont une variété riemannienne ou lorentzienne de dimension 4, son fibré tangent (Géométrie) et le tenseur énergie impulsion (Physique). Le fibré tangent a la structure d'un fibré vectoriel, que l'on peut associer à un fibré principal : le fibré des repères orthonormés de groupe $O(n)$ à holonomie maximale. Tout cela fut repris dans les années 50 pour donner naissance aux théories géométriques de l'électromagnétisme, aux théories de Yang-Mills à partir de la théorie des fibrés et connexions élaborée dix ans plus tôt en mathématiques [Steenrod, Ehresmann]. L'arrivée de la théorie des cordes a enrichi ce décor, on peut vraiment dire que la géométrie moderne sous toutes ses formes a fait son entrée en physique. La démonstration d'une conjecture datant du siècle dernier, en géométrie énumérative a même trouvé son inspiration dans la physique de la théorie des champs [Kontsevich 1990]. L'avènement des théories supersymétriques en physique a engendré la théorie des supercordes. Elle a aussi permis aux particules étendues de vivre dans un espace "plus réaliste" de dimension topologique 10. On peut en effet définir une théorie "parfaitement libre", en remplaçant une particule se déplaçant dans l'espace temps classique $(1, 3)$ par une corde vibrante "bosonique", peu exigeante sur la nature géométrique de l'espace dans laquelle elle évolue, l'espace temps lorentzien classique $(1, D)$ mais avec $D = 26$ pour exorciser l'espace des fantômes : ces masses négatives à l'état fondamental ;

dans ce scénario le cadre géométrique est à peu de chose près celui de la relativité générale. En revanche, les contraintes de la supersymétrie sont très fortes ; elles conduisent à remplacer un espace temps (1, 9) par une fibration sur l'espace temps classique (1, 3) en variétés dites de Calabi -Yau. Les six dimensions restantes, pour ce faire, doivent être compactifiées correctement pour générer notre univers (et cela n'est pas si simple). A ce prix on peut définir des variétés complexes (kahleriennes) très spéciales dont l'holonomie est plus faible (holonomie SU(1) et qui impose une courbure de Ricci nulle). L'exemple le plus simple d'une telle variété est fournie par le tore complexe : c'est une courbe elliptique, ou variété complexe de dimension 1. Dans cet exposé, nous allons dans un premier temps parler du modèle A de la théorie des cordes, à savoir les invariants de Gromov et Witten. Dans la deuxième partie de l'exposé, nous évoquerons la symétrie miroir B -modèle qui généralise la dualité T en théorie des cordes et permet de calculer les invariants sous un cadre "miroir".

2 La Physique de la théorie des champs et des cordes

2.1 Exemple de champs classiques

Le concept de champ est fondamental en physique. Un champ φ est une fonction d'un espace de paramètres (espace source) dans un espace but, M (espace physique) ayant un nombre suffisant de dimensions. C'est donc la donnée d'un "paquet" (Σ, M, φ) et d'une action classique : S où : Σ est l'espace source, souvent une variété : pour la mécanique classique du point c'est l'axe temporel . Pour les théorie de champs conformes, la théorie des cordes c'est une surface de Riemann...

La densité lagrangienne est une fonction dépendant d'un ou plusieurs champs ainsi que de ses dérivées premières :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \partial_\mu \varphi_1, \partial_\mu \varphi_2 \dots).$$

L'action classique est l'intégrale classique de la densité Lagrangienne sur l'espace des paramètres : $S = \int \mathcal{L} d^{n+1}x$

Principe de moindre action : la minimisation de l'action ($\delta S = 0$, conduit pour chaque champ noté simplement φ à l'équation d'Euler Lagrange qui donne les équations du mouvement de la particule : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0$

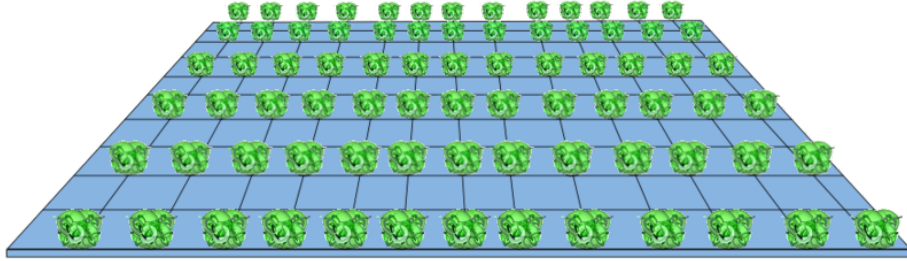


FIGURE 1 – Les dimensions enroulées

2.2 Exemple de champs classiques

La particule libre : pour une particule libre, le champ est simplement la courbe paramétrée qui décrit la trajectoire de la particule libre dans l'espace soit : $x(t)$. Si la particule est libre, on peut prendre pour densité lagrangienne :

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, l'équation d'Euler Lagrange est alors :
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = -\partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = 0$ et la solution est le mouvement rectiligne uniforme.

La corde libre : pour une corde libre, le champ est simplement la fonction qui décrit la trajectoire de la particule corde dans l'espace soit : $X(\tau, \sigma)$. Sa densité lagrangienne est contenue dans l'action de Nambu-Goto :

$$S = -T \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^l d\sigma \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} X')^2} \text{ avec } \dot{X}^2 = \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}, \dot{X} X' = \dot{X}^\mu X'^\nu \eta_{\mu\nu}$$

l'équation d'Euler Lagrange est alors : $\partial_\tau \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} + \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = 0$ et la solution est l'équation des cordes vibrantes.

2.3 Symetries de Noether

Symétrie de l'action : le rôle de symétrie est capital en physique. On veut par exemple que l'action soit invariante via une transformation, translation, rotation... :si $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$ alors $S \rightarrow S + \delta S$

Théorème de Noether : au travers d'une quelconque symétrie, l'action est inchangée : $\delta S = 0$

Exemple translation : $x \rightarrow x + \epsilon$ On reprend la particule libre, ϵ petit, independant du temps,

$$\delta S = \int (m\dot{x}\dot{\epsilon})dt = \epsilon m\dot{x}|_{t_0}^{t_1} - \int (m\ddot{x})\epsilon dt$$

et comme $\ddot{x} = 0$; il vient : que la symétrie par translation est équivalente à

la conservation de la quantité de mouvement $p = m\dot{x}$

Notation : En physique la symétrie $x \rightarrow x + \epsilon$ est noté $\delta x = \epsilon$.

2.4 Complexification de la corde bosonique

On peut définir l'action de Polyakov car l'action décrite plus haut est difficile à quantifier : quitte à lui rajouter une métrique sur la feuille d'univers, on peut montrer qu'elle est équivalente à celle de Polyakov :

$$S = -T/2 \int_{\Sigma} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}(\sigma, \tau) \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} \eta_{\mu\nu} d\sigma d\tau$$

Courbe paramétrée : en posant $z = \tau + i\sigma$, la fonction $(\tau, \sigma) \rightarrow X(\tau, \sigma)$, autrement dit un champ réel devient un champ complexe $z \rightarrow f(z)$, autrement dit une courbe (complexe) paramétrée.

Particule, corde : l'évolution d'une particule ponctuelle est décrite par une courbe paramétrée, celle d'une corde par une courbe complexe paramétrée, parmi elles certaines auront un statut privilégié,

Les courbes holomorphes sont les instantons du modèle A de Witten et ont été étudiées par M.Gromov en géométrie symplectique.

2.5 Champs quantiques, QFT

Intégrale de chemin : l'incertitude sur la position ou la quantité de mouvement en mécanique quantique conduit à remplacer la solution classique (minimum de l'action) par la fonction de partition où ensemble de toutes les solutions possibles : c'est l'intégrale de chemin $\mathcal{Z} = \int_{\Sigma \rightarrow M} e^{-S(\varphi)} \mathcal{D}\varphi$:

Fonctions de corrélations : De même, on peut calculer les fonctions de corrélations, ou fonctions à n points.

$$\langle \varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n) \rangle = \int_{\Sigma \rightarrow M} \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) e^{-S(\varphi)} \mathcal{D}\varphi$$

On peut appliquer cela au sigma modèle supersymétrique et définir une nouvelle théorie quantique des champs : la TFT. Le programme développé par Witten consiste à calculer les fonctions de corrélation, en remplaçant chaque valeur de champs par une classe de cohomologie dite BRST. Il s'agit, d'introduire des variables fermioniques invariantes par des symétries de Noether spéciales appelées supersymétries.

2.6 Supersymétrie

On peut définir une théorie de champs supersymétrique $\Sigma \rightarrow M$ en ajoutant des variables fermioniques, autrement dit des sections d'un certain fibré vectoriel E sur Σ . Une bonne image locale d'un champ fermionique est $\psi(x) = \Sigma f_i(x) dx_i$, une 1-forme et comme produit le wedge-product. On a le théorème :

Théorème de localisation : l'intégrale de chemin est localisée autour de configurations de champs pour lesquelles les variables fermioniques sont invariantes par transformations supersymétriques.

Une transformation supersymétrique est une transformation infinitésimale de l'action, qui transforme bosons en fermions et réciproquement.

2.7 Calculus supersymétrique

On peut définir un Calculus supersymétrique :

Calcul algébrique : Soit ψ_1, ψ_2 deux fermions $\psi_1\psi_2 = -\psi_2\psi_1$, on en déduit $\psi\psi = 0$

Soit, X une variable bosonique, $\psi X = X\psi$

Calcul intégral : $\int (a+b\psi)d\psi = b$, $\int \psi d\psi = 1$, $\int \psi_1\psi_2\dots\psi_n)d\psi_1d\psi_2\dots d\psi_n = 1$, $\int d\psi = 0$

Changement de variables : On a : $\int \tilde{\psi}d\tilde{\psi} = \int \psi d\psi = 1$

2.8 Exemple supersymétrie en dimension zero

Un "Toy" modèle consiste à prendre pour espace de départ $\Sigma = \{P\}$ et pour espace d'arrivée $M = \mathbb{R}$ la droite réelle. Dans ce contexte, un Champ est simplement la variable x , l'intégrale de chemin est simplement $\mathcal{Z} = \int_M e^{-S(x)} dx$

Dans ce contexte, une action supersymétrique est donnée par :

$$S(x, \psi_1, \psi_2) = \frac{h'(x)^2}{2} - h''(x)\psi_1\psi_2.$$

d'où la fonction de partition :

$$\mathcal{Z} = \int e^{-\frac{h'(x)^2}{2} + h''(x)\psi_1\psi_2} dx d\psi_1 d\psi_2$$

En développant la partie fermionique en série entière, il vient :

$$\mathcal{Z} = \int e^{-\frac{h'(x)^2}{2}} (1 + h''(x)\psi_1\psi_2) dx d\psi_1 d\psi_2, \text{ mais } \int d\psi = 0, \text{ par suite la première intégrale est nulle, on a :}$$

$$\mathcal{Z} = \int_M h''(x) e^{-\frac{h'(x)^2}{2}} dx \int \psi_1 d\psi_1 \int \psi_2 d\psi_2,$$

et comme $\int \psi d\psi = 1$ (intégration fermionique) il vient :

$$\rightarrow \mathcal{Z} = \int_M h''(x) e^{-\frac{h'(x)^2}{2}} dx$$

2.9 Transformations supersymétrique

Pour l'exemple présenté ci dessus, on peut définir des transformations supersymétriques qui respectent cette action.

$$\delta x = \epsilon_1 \psi_1 + \epsilon_2 \psi_2$$

$$\delta \psi_1 = h'(x) \epsilon_2$$

$\delta \psi_2 = -h'(x) \epsilon_1$ On montre que $\delta S = 0$, ; les variables fermioniques sont invariantes pour la transformation supersymétrique ssi $h'(x) = 0$. Si $h'(x) \neq 0$, le changement de variables $(x, \psi_1, \psi_2) \rightarrow (x - \frac{\psi_1 \psi_2}{h'(x)}, \psi_1, \psi_2)$ montre que la fonction de partition est nulle en dehors des points critiques. En developpant au deuxième ordre au voisinage du point critique x_c

$$(h(x) = h(x_c) + \frac{h''(x_c)}{2}(x - x_c)^2) :$$

$$\mathcal{Z} = \int_M h''(x) e^{-\frac{h'(x)^2}{2}} dx$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{h'(x_c)=0} h''(x_c) \int_M \exp(-\frac{(h''(x_c)(x-x_c))^2}{2}) dx,$$

avec le chgt de variables $y = |h''(x_c)|(x - x_c) :$

$$\mathcal{Z} = \sum_{h'(x_c)=0} \sqrt{\pi} \frac{h''(x_c)}{|h''(x_c)|}$$

Résumé

Supersymétrie : On vient de définir une action supersymétrique pour une théorie des champs de dimension 0 en ajoutant des fermions, variables supersymétriques.

Invariance : Cette action est invariante sous des transformations supersymétriques.

Localisation : L'intégrale de chemin associée est localisée sur les champs pour laquelle les fermions sont invariants par supersymétrie.

Vers une généralisation : Cela suggère de définir un opérateur qui s'annule sur ces champs fermioniques. Un champ fermionique est assimilé à une forme différentielle, il y a une idée de cohomologie la dessous.

2.10 Application : Le modèle A de Witten "A side of the mirror"

Soit, L , Le lagrangien supersymétrique d'une super-corde :

$$L = 2t \int_{\Sigma} (\frac{1}{2} g_{IJ} \partial_z \phi^I \partial_{\bar{z}} \phi^J) d^2 z + 2t \int_{\Sigma} (i \psi_z^{\bar{i}} D_{\bar{z}} \chi^i g_{\bar{i}i} + i \psi_z^i D_z \chi^{\bar{i}} g_{\bar{i}i} - R_{\bar{i}i j \bar{j}} \psi_z^{\bar{i}} \psi_z^j \chi^{\bar{j}} \chi^{\bar{j}}) d^2 z$$

La première intégrale est la partie bosonique de l'action, la seconde la parties fermioniques où les champs sont les sections de fibrés sur Σ :

Partie fermionique

- $\chi(z)$ une section \mathcal{C}^∞ de $f^*TX \otimes \mathbb{C}$
- $\psi_z(z)$ une section \mathcal{C}^∞ de $(T^{10}\Sigma)^* \otimes f^*T^{01}X$
- $\psi_{\bar{z}}$ une section \mathcal{C}^∞ de $(T^{01}\Sigma)^* \otimes T^{10}X$

Transformation supersymétriques préservant l'action

$$\begin{aligned}\delta x^I &= \eta \chi^I & \delta \chi^I &= 0 \\ \delta \psi_{\bar{z}}^i &= \eta \partial_{\bar{z}} \phi_i & \delta \psi_z^{\bar{i}} &= \eta \partial_z \bar{\phi}_i\end{aligned}$$

- Si $\delta \psi_{\bar{z}}^i = \delta \psi_z^{\bar{i}} = 0$, on reconnaît les conditions de Cauchy-Riemann! : Les instantons du modèle sont les courbes "à énergie minimale" selon Gromov : les courbes holomorphes.

2.11 Cohomologie BRST

Aux transformations fermioniques (précédente on associe un opérateur Q (pour charge), la terminologie est empruntée à l'électromagnétisme : une charge est l'intégration d'un "courant". Mathématiquement, l'opérateur Q a les propriétés d'une forme différentielle ordinaire (on aura donc isomorphisme en cohomologie avec celle de De Rham :

Propriétés de l'opérateur

- $Q(x^I) = \chi^I$ $Q(\chi^I) = 0$
- Q est un opérateur linéaire.
- $Q(fg) = Q(f)g + fQ(g)$: Q est une dérivation.

Cohomologie BRST

- On remarque que $Q^2 = 0$
- $H_{BRST}^p = \frac{Ker Q: \mathcal{H}_p \rightarrow \mathcal{H}_{p+1}}{Im Q: \mathcal{H}_{p-1} \rightarrow \mathcal{H}_p}$ est le p -ième groupe de cohomologie BRST

2.12 Fonctions de corrélations BRST

Dans les fonctions de corrélations les champs sont remplacés par leurs classes de cohomologie, ils sont donc définis modulo un terme exact près :

Fonctions de corrélations les fonctions de corrélations de la théorie topologique des champs seront données par :

$$\langle [\Phi_1(x_1)], \dots, [\Phi_n(x_n)] \rangle = \int_{\Sigma \rightarrow M} \Phi_1(x_1) \dots \Phi_n(x_n) e^{-S} \mathcal{D}x \mathcal{D}g \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\psi$$

- elles ne dépendent pas des points choisis sur la surface de Riemann.

Fonction de corrélations du côté A du miroir

- Soit $\omega_1, \dots, \omega_n$ des formes sur M ,
- $$\langle [\omega_1], \dots, [\omega_n] \rangle = \int_{\Sigma \rightarrow M} \omega_1 \dots \omega_n e^{-(S_B(f) + S_F(f))} \mathcal{D}x \mathcal{D}g \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\psi$$

- Par le théorème de localisation : l'intégrale de chemin se localise autour des courbes holomorphes $\tilde{f} : \langle [\omega_1], \dots, [\omega_n] \rangle = \int_{\Sigma \rightarrow M} \omega_1 \dots \omega_n e^{-(S_B(\tilde{f}))} \mathcal{D}x \mathcal{D}g \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\psi$
- $e^{-(S_B(\tilde{f}))} = e^{-\int_{\Sigma} \tilde{f}^* \omega}$ est un invariant topologique donnant "le degré" de l'application \tilde{f} .

2.13 Lien avec la géométrie énumérative

L'intégrale de chemin précédente peut donc être réécrite :

$$\langle [\omega_1], \dots, [\omega_n] \rangle = \sum_{\beta \in H_2(M, \mathbb{Z})} e^{-\int_{\Sigma} \tilde{f}^* \omega} \int_{\tilde{f}(\Sigma) \in \beta} \omega_1 \dots \omega_n \mathcal{D}x \mathcal{D}g \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\psi$$

Ici $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ est une classe de cohomologie, "concrètement" le degré de \tilde{f} .

Comptage de courbes

On peut espérer que l'intégrale :

$$\int_{f(\Sigma) \in \beta} \omega_1 \dots \omega_n \mathcal{D}x \mathcal{D}g \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\psi$$

prise sur un espace de module \mathcal{M} à définir correctement, puisse fournir un nombre entier. Ce sera le cas si la dimension de cet espace de module est en rapport avec le nombre de champs $[\omega_i]$ Invariants de Gromov Witten Ces intégrales qui donneraient des nombres entiers dans les bons cas sont les invariants de Gromov Witten. Leur connaissances fournit un moyen de calculer les fonctions de corrélations d'un point de vue topologique et espérer comprendre mieux la physique!

3 Les mathématiques de Gromov et Grothendieck

L'étude globale des variétés autres que topologiques où différentiables est très difficile. Déjà Grothendieck commence par étudier des modules de courbes, plus maléables, car il sagit d'attaquer l'objet par ses sections ce qui est beaucoup plus facile. Gromov constate cela. Il y a très peu de fonctions holomorphes sur une variété munie d'une structure (presque) complexe comme les variétés symplectiques.

La grande idée de Gromov est d'envisager l' étude d'une variété symplectique à travers ses sections : les courbes holomorphes

Courbes, courbes paramétrées En mathématique le worldsheet est une courbe (surface de Riemann), l'évolution d'une corde bosonique c'est à dire un champ de $\Sigma \rightarrow X$ est une courbe paramétrée.

Géométrie symplectique où géométrie algébrique On peut présenter les invariants de Gromov-Witten par un de ces deux points de vue Géométrie symplectique (Ruan, Tian), Géométrie algébrique (Pandharipande, Katz).

3.1 Géométrie symplectique et courbes pseudoholomorphes

Rappelons qu'une variété symplectique est une variété différentielle munie d'une 2-forme fermée $\omega : (M, \omega)$. L'exemple le plus simple est \mathbb{R}^{2n} et $\omega = \sum dx_i \wedge dy_i$; dans ce cas on peut aussi considérer l'espace \mathbb{C}^n , ou créer de nouvelles structures complexes J qui sont toutes intégrables. Ainsi \mathbb{R}^{2n} peut être muni d'une structure de variété analytique ce qui ne sera pas toujours le cas.

Courbe paramétrée une courbe paramétrée est une application :

$\varphi : (\Sigma, j) \rightarrow (M, J)$, où j est une structure presque complexe sur Σ , J une structure presque complexe sur la cible.

Courbe pseudoholomorphe : une courbe paramétrée est une courbe pseudoholomorphe si sa différentielle vérifie les équations de Cauchy-Riemann : $J \circ d\varphi = d\varphi \circ j$, (la différentielle est \mathbb{C} linéaire).

3.2 Formule de Riemann-Roch espace de module de courbes

On se place pour l'instant dans le contexte de la géométrie algébrique, plus général. On donne sans démonstration ici la formule de Riemann Roch pour une courbe, C'est le cas des surfaces de Riemann qui nous interesse ici, on note $\mathcal{M}_g, \mathcal{M}_{g,n}$. L'espace de module des courbe de genre g , et celui des courbes à n points marqués :

Formule de Riemann Roch pour une courbe :

La formule de Riemann-Roch donne :

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(T\Sigma) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(T\Sigma) = \int_{\Sigma} ch(T\Sigma) td(T\Sigma)$$

Concrètement, $\dim_{\mathbb{C}} H^0(T\Sigma)$, compte les automorphismes infinitésimaux,

$\dim_{\mathbb{C}} H^1(T\Sigma)$, est la dimension complexe de l'espace de module des courbes.

Pour une surface de Riemann de genre g on obtient :

Dimension de \mathcal{M}_g :

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(T\Sigma) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(T\Sigma) = 3 - 3g$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_g = 3g - 3 + \dim_{\mathbb{C}} H^0(T\Sigma)$$

3.3 Formule de Riemann-Roch d'une application, courbes, applications stables

Donnons tout d'abord une application de la formule précédente : $H^0(T\Sigma)$ compte le nombre de points marqués qu'il faut pour stabiliser la courbe ainsi :

$$\text{si } g \geq 2 : \dim(H^0(T\Sigma)) = 0 : \dim(H^1(T\Sigma)) = \dim(\mathcal{M}_g) = 3g - 3$$

$$\text{si } g = 1 : H^0(T\Sigma) = \mathbb{C} : \dim(H^1(T\Sigma)) = \dim(\mathcal{M}_g) = 1$$

si $g = 0 : \dim(H^0(T\Sigma)) = 3 : H^1(T\Sigma) = \mathcal{M}_g$ est un point.

Nous allons donc porter notre attention sur les courbes (et applications) stables. Soit $\phi : \Sigma \rightarrow X$ une courbe holomorphe

Formule de Riemann Roch pour une application :

La formule de Riemann-Roch donne dans ce cas :

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(\phi^*TX) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(\phi^*TX) = \int_{\Sigma} ch(\phi^*TX) td(\Sigma) \\ = n(1 - g) + \int_{\Sigma} \phi^*c_1(TX)$$

3.4 Courbes, applications stables, espaces de modules

En genre 0, un automorphisme de $P^1(\mathbb{C})$ est déterminé par les images de trois points distincts, autrement dit les automorphismes qui fixent deux points forment un sous groupe no discret de $PGL(2, \mathbb{C})$, on aura donc des automorphismes infinitésimaux. Pour pouvoir se débarrasser des automorphismes infinitésimaux c'est à dire stabiliser la courbe, il faut rajouter des "points marqués", ce faisant on stabilise la courbe. Une courbe stable est une courbe à laquelle on a rajouté des points marqués en nombre suffisant pour tuer les automorphismes infinitésimaux. :

Applications stables

Une application stable est une courbe paramétrée $(\Sigma, (x_1, \dots, x_k), \varphi)$ pour laquelle Σ est stable. On peut maintenant donner la définition de l'espace de module des applications stables avec k points marqués noté $\mathcal{M}_{g,n}(X, \beta)$.

Définition On définit l'espace :

$\mathcal{M}_{g,n}(X, \beta) = \{(\Sigma, (x_1, \dots, x_n), \varphi), \varphi : \Sigma \rightarrow X, \varphi_*(\Sigma) = \beta\} / \sim$ où \sim est quotienté par le groupe de reparamétrage respectant les points marqués.

L'espace considéré ci dessus n'est pas compact en général, aussi on note $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ sa compactification, cela revient à rajouter des courbes singulières.

3.5 Dimension (virtuelle) de l'espace des courbes holomorphes

A partir des deux formule précédentes (R.R pour courbe et R.R pour courbe paramétrée, on peut en déduire la dimension virtuelle de l'espace de modules des courbes holomorphes. Pour cela on peut raisonner à l'aide des suites exactes On considère la suite exacte longue en cohomologie associée à la suite exacte : $0 \rightarrow T_{\Sigma} \rightarrow f^*T_X \rightarrow N_{\Sigma/X} \rightarrow 0$

Pour les détails cf [Pandharipande]

Dimension de $\mathcal{M}_g(X)$

En combinant les deux formules de de Riemann-Roch précédentes :

$$\dim_{virt} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) = (\dim X)(1 - g) + \int_{f_*(\Sigma)} c_1(TX) + 3g - 3 + n$$

On aurait pu retrouver directement ce résultat dans le cadre symplectique (les variétés que l'on traite sont kahlériennes donc symplectiques) en invoquant l'indice d'un opérateur de Fredholm pour un complexe elliptique ad'hoc.

4 Les invariants de Gromov-Witten

On utilise la notation : $[\cdot]$ pour désigner la classe fondamentale dans $H_k(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta), \mathbb{Q})$: On peut maintenant définir correctement d'un point de vu mathématique les invariants de Gromov-Witten. En effet si $[\omega_1], \dots, [\omega_n]$ sont n classes de cohomologies dans $H_{DR}^*(X)$ tel que $\sum_{i=1}^n \deg[\omega_i] = k$ une "intégration sur l'espace de module" sera alors un nombre non nulle, on pourra donc espérer compter quelque chose.

Définition : invariants de Gromov-Witten

On appelle invariant de Gromov-Witten la quantité :

$$\langle [\omega_1], \dots, [\omega_n] \rangle_{\beta} = \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)]} ev^*([\omega_1]) \wedge \dots \wedge ev^*([\omega_n])$$

Dans cette écriture on a utilisé une opération d'évaluation :

$$\begin{array}{lll} ev_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \rightarrow X & : & (\Sigma, x_1, \dots, x_n, \varphi) \mapsto \varphi(x_i) \\ ev_i^* : H^*(X) \rightarrow H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)) & : & [\omega_i] \mapsto ev_i^*([\omega_i]) \end{array}$$

On peut voir cela de façon plus explicite en introduisant le dual de Poincaré C_i associé à $[\omega_i]$: l'invariant est vu comme une intersection de cycles :

Définition 2

On appelle invariant de Gromov-Witten la quantité :

$$\langle [\omega_1], \dots, [\omega_n] \rangle_{\beta} = \#(ev_1^{-1}(C_1) \cap \dots \cap ev_n^{-1}(C_n)) \cap [\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)]$$

Dans cette écriture on a utilisé une opération d'évaluation :

$$\begin{array}{lll} ev_i & : & \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \rightarrow X & : & (\Sigma, x_1, \dots, x_n, \varphi) \mapsto \varphi(x_i) \\ ev_i^{-1} & : & X \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) & : & C_i \mapsto ev_i^{-1}(C_i) \end{array}$$

Il faut comprendre que l'on va compter le nombre de courbes φ de la classe β qui rencontrent les cycles C_i aux points x_i ($\varphi(x_i) \in C_i$)

4.1 Exemple 1 : applications de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

Rappelons que $\int_{\mathbb{P}^1} \varphi^*(T\mathbb{P}^2) = d \cdot 3$, où d est le degré de l'application. Rappelons aussi que dans ce cas simple le degré de l'application est moins abstrait que la classe β ; pour $d = 0, 1, 2, \dots$ on a les applications constantes, la classe des droites, les coniques...

Dimension de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, d)$

On a la formule : $\dim(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, d)) = 3d - 1 + n$

Si $d = 1$: $\dim(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, d)) = 2 + n$: Classe des droites

Si $d = 2$: $\dim(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, d)) = 5 + n$: Classe des coniques

A quelle condition l'invariant $\langle [pt_1], \dots, [pt_n] \rangle_d$ est-il non trivial : il faut $\sum_i \deg([pt_i]) = \dim(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, d))$, mais on sait que

$\deg([pt_i]) = \text{codim}[pt_i] = 2$

Pour $d = 1$ on trouve $n = 2$, $\langle [pt_1], [pt_2] \rangle_1 = 1$: Par deux points ne passe qu'une seule droite !

4.2 Formule itérative de Kontsevich

On trouve $n = 5$, $\langle [pt_1], \dots, [pt_5] \rangle = 1$. On retrouve que par 5 points on peut faire passer 1 conique. En s'inspirant du diagramme de Feynman à quatre pattes Maxim Kontsevich a montré la formule itérative ci-dessous qui était alors une conjecture de géométrie énumérative ! **Formule de Kontsevich** : On note N_d le nombre de courbes de degré d passant par le nombre de points voulu

$$N_d = \sum_{d=d_1+d_2} N_{d_1} N_{d_2} (d_1^2 d_2^2 \mathbf{C}_{3d_1-2}^{3d-4} - d_1^3 d_2 \mathbf{C}_{3d_1-1}^{3d-4})$$

En appliquant cette formule, on trouve : $N_2 = 1$, $N_3 = 12$, $N_4 = 620$

4.3 Exemple 2 : Retour à la physique !

Nous revenons maintenant au cas qui nous intéresse pour le modèle A supersymétrique de Witten ; on envisage X variété de Calabi-Yau de dimension 3 incluse dans $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$

Dimension de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$

On sait qu'une variété de Calabi-Yau est Ricci-plate cela se traduit par : $\int_{\Sigma} \varphi^*(c_1(X)) = 0$ dans ces conditions,

$$\dim(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)) = -3 + 3g + \dim X(1 - g) + n$$

Si $g = 0$ et $\dim X = 3$ il vient :

$$\dim(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)) = n$$

Dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$, comme $\deg([H]) = \text{codim}[H] = 1$ il faut n hyperplans



FIGURE 2 – Une variété de Calabi Yau

dans $\langle [H], \dots, [H] \rangle_\beta$ pour rendre cette fonction de corrélation non trivial. Pour $n = 3$, on a la fonction de corrélation à trois points ou "pantalon" : $\langle [H], [H], [H] \rangle_\beta$, "lego" de base en théorie topologique des champs.

4.4 Exemple 2 : Calcul de la fonction de corrélation à trois points : les problèmes, La symétrie miroir

Le calcul des fonctions de corrélation par la méthodes directe du coté "A" du miroir est mal aisé : si on développe :

$$\langle [H], [H], [H] \rangle = \sum_\beta \langle [H], [H], [H] \rangle_\beta e^{-\int_\beta \omega}.$$

Une conjecture de Clemens dit que l'on ne peut pas calculer ce nombre à cause d'un problème de revêtements multiples, lequel vient contredire la dimension 0 attendu pour l'espace de module d'applications avec 0 points marqués.

Pour s'en sortir il faut travailler de l'autre coté du miroir.

Symétrie miroir

Les objets avec lesquelles on travaille en géométrie énumérative sont des formes de Khler et paramètrent les déformations de la géométrie. La symétrie miroir dit que l'on peut exprimer la même physique en paramétrant les déformations de la structure complexe sur une variété miroir et en identifiant les fonctions de corrélations provenant des deux modèles.

But that is an another story!

Références

- [1] Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Taylors Francis, New York, 2003.
 - [2] D.McDuff, D.Salamon, *Introduction to symplectic géometry* Oxford University Press, 1995.
 - [3] D.McDuff, D.Salamon, *J-holomorphic Curves and Quantum Cohomology*, Univ. Lecture series 6, A.M.S., 1994.
 - [4] M. Kontsevich, Y.Manin, *Gromov-Witten Class, Quantum Cohomology, and enumerative Geometry*, Mirror symetry II, A.M.S/IP Studies in advanced Math., Vol 1 A.M.S, 1997, pp. 607-653.
 - [5] M.Audin *Cohomologie quantique* Séminaire Bourbaki,*n*^o 807, 1995.
 - [6] S.Donaldson, P. Kronheimer, *The geometry of four manifolds*, Oxford University Press, 1990.
- K. Becker, MBecker, J. H. Schwarz *String theory and M-theory* Cambridge, 2007.
- B.Zwiebach, *A first course in sting theory*, Cambridge, 2004. Press, 1990.
- K.Hori, S. Katz, A. Klem, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, E. Zaslow, *Mirror symmetry*, AMS, 2003. Press, 1990.