CNAM GEII première année
Mathématiques Cours 8 :
Primitives et intégrales

Janvier 2012

1 Calcul d'aires

On connait bien l'aire de figures géométrique élémentaires : rectangle, triangle ou cercle. On aimerais pouvoir déterminer l'aire en dessous d'une fonction numérique continue quelconque au dessus d'un intervalle $[a, b]$

1.1 Sommes de Riemann

Supposons donnée une fonction sur un intervalle [a,b]. On suppose f croissante sur [a,b] pour simplifier l'exposition. Cependant on peut travailler avec n'importe quelle fonction. On distinguera alors celles qui sont intégrables (au sens de Riemann) ainsi : on définie :

$$\mathcal{A}_{f,n}^{Inf} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$$
$$\mathcal{A}_{f,n}^{Sup} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Si la difference de ces deux sommes tend vers 0.

On note $\int_a^b f(x)dx$ la limite commune de ces deux sommes.

Remarque :
Cette définition est parfois trop restrictive mais sera suffisante pour la plupart des applications. Par exemple la fonction caractéristique des rationnelle n'est pas intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[0, 1]$ mais on a le théorème :

Théorème :
Toute fonction **continue** sur un intervalle $[a, b]$ (donc fermé borné) est intégrable au sens de Riemann.

Preuve (rapide) :
On remarque que $|\mathcal{A}^{Sup}_{f,n} - \mathcal{A}^{Inf}_{f,n}| = \frac{b-a}{n}|f(b) - f(a)|$
D'autre part on voit aisement que si f croissante sur [a,b] (on peut toujours se rammener a cela) : $\mathcal{A}^{Inf}_{f,n} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \mathcal{A}^{Sup}_{f,n}$ et donc :
$|\mathcal{A}^{Sup}_{f,n} - \int_a^b f(x)dx| \leq |\mathcal{A}^{Sup}_{f,n} - \mathcal{A}^{Inf}_{f,n}| \leq \frac{b-a}{n}|f(b) - f(a)|$

La dernière ligne montre que toute fonction continue sur un intervalle fermé est **intégrable au sens de Riemann** et que les sommes de Riemann tendent vers une limite commune que l'on nomme **l'intégrale** de f sur l'intervalle fermée borné [a,b].

1.2 Propriété de l'intégrale d'une fonction continue.

On les propriétés suivantes :

1. Si $f \geq 0$ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (Positivité)
2. $\int_a^b f(x)dx = \displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (Relation de Chasles)
3. $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b f(x)dx$ (linéarité)

2 Calcul des intégrales : primitives

Supposons f continue sur l'intervalle $[c, x + h]$,$h > 0$ elle l'est donc aussi sur l'intervalle $[c, x]$ On note $F_c^(x)$ l'aire de f sous son graphe et au dessus de l'intervalle $[c, x]$ on a donc : $F_c(x + h) - F_c(x) \approx f(x)h$

Cela montre que f est la **dérivée** de la fonction F_c. d'autre part si on change c en d cela donne le même résultat : f est encore la dérivée de F_d, les deux fonctions F_c, et F_d sont par définition deux **primitives** de la même fonction f. Elle diffère d'une constante C : ici $C = \displaystyle\int_d^c f(x)dx$

Méthode :
Pour intégrer une fonction f il suffit de trouver une primitive la fonction F_c par exemple (dont f dérive) alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx = F_c(b) - F_c(a)$$

Si on dispose d'un tableau donnant les primitives ("inverse de dérivé"), que l'on trouve dans tous les bon catalogues de Maths (et non donné ici), on saura intégrer des fonctions.

3 Procédés pratiques d'intégration

On distingue (hormis le calcul directe si celui ci est possible) pour calculer des primtives et intégrales : Ce sont, l'intégration par partie et le changement de variables.

3.1 Intégrations par parties

on connait la formule de dérivation du produit de deux fonctions : $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
A partir de cette formule on déduit la formule d'intégration par partie :
$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

Exemple d'application :

Calculons $\int_0^\pi xsin(x)dx$, on pose $v(x) = x$; $u'(x) = sin(x)$

$$\int_0^\pi xsin(x)dx = -\pi.cos(\pi) + 0.cos(0) + \int_0^\pi 1.cos(x)dx = \pi$$

3.2 Changement de variables

Supposons que φ soit une fonction difféomorphisme (fonction dérivable et inversible) de [a,b] sur [c,d] et que $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$ et x=$\varphi(t)$. Alors $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t)\varphi'(t)dt$

Exemple d'application :

Calculons $\displaystyle\int_0^{\pi/2n} sin(\frac{2\pi t}{n})dt$

On pose $x = \dfrac{2\pi t}{n}$,alors $dx = \dfrac{2\pi dt}{n}$, et l'intégrale devient :

$\displaystyle\int_0^{\pi/2n} sin(\frac{2\pi t}{n})dt = \int_0^{\pi^2/n^2} sin(x)\frac{ndx}{2\pi} = \tfrac{n}{2\pi}\textstyle\int_0^{\pi^2/n^2} sin(x)dx$

Cette dernière intégrale se calcule aisement.