CNAM GEII première année
Mathématiques Cours 11 :
Théorème de Rolle, Théorème des accroissements finis

Mars 2012

Théorème de Rolle

On considère une fonction f continue et dérivable un intervalle.

Théorème

Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, on suppose en outre que $f(a) = f(b) = 0$, alors **il existe** un réel c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Preuve

Comme f est continue sur un intervalle "compacte" (fermé bornée) elle atteint un maximum (ou un minimum mais on raisonne dans le cas d'un maximum) M sur cet intervalle (M=$f(c)$), et comme f est dérivable $f'(c) = 0$ mais alors $\lim\limits_{t \to c^-} \dfrac{f(t) - f(c)}{t - c} \leq 0$ et $\lim\limits_{t \to c^+} \dfrac{f(t) - f(c)}{t - c} \geq 0$ D'ou le résultat.

Théorème des accroissements finis

Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors **il existe** un réel c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Preuve

On applique le théorème de Rolle a la fonction :
$\varphi(t) = f(t) - f((a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a)$
et on se retrouve dans la situation du théorème de Rolle.

Exercices

Exercice 1

Determiner un nombre c de l'intervalle $]2, 8[$ tel que $f'(x)$=0 avec
$f(x) = \dfrac{x}{16 + x^2}$

Exercice 2

Determiner tous les nombres c del'intervalle $]0, 4\pi[$ tel que $f'(x)$=$\frac{f(4\pi)-f(0)}{4\pi-0}$ avec $f(x) = x + sinx$

Exercice 3

On considère le polynôme $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$, avec $a_1, a_2, ..., a_n$ tous distincts.

1. Démontrer que l'équation P'(x)=0 possède exactement $n - 1$ racines distinctes.
2. Determiner un polynôme A de degré 3 dont le coefficient de plus haut degré est 1 et possèdant $1, 2, 3$ comme racines.
3. Dire sans aucun calculs combien de racines possède A'.

Exercice 4

1. Démontrer que pour tout réel strictement positif x, on a :
   $\dfrac{1}{x+1} \leq ln(x + 1) - ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$
2. Trouver un encadrement de $ln(1, 003)$ sans utiliser la calculette