CNAM GEII première année
Mathématiques Cours 6 :
Bijection, fonctions réciproques

novembre 2011

1 Fonctions injectives, surjectives bijectives

On va donner les définitions d'applications, d'applications injectives et surjectives

1.1 Applications injectives et surjectives, bijections

On commence par donner une définition générale ; Cette définition n'est pas seulement valable pour les fonctions numériques :

Définition
On dit qu'une correspondance d'un ensemble A vers un ensemble B est une application quand tout élément de l'ensemble de départ A a une image et une seule dans l'ensemble d'arrivée B.
Par exemple, une fonction numérique est une application quand on l'a restreint à son ensemble de définition.

Application injective, surjective
Une application injective (resp. surjective) est une application pour laquelle tout élément de l'ensemble d'arrivée B a au plus (resp. au moins) un antécédent.

Application bijective
Une application bijective est une application pour injective et surjective.

Remarque : fonction réciproque
Si une application est bijective, chaque élément de l'ensemble d'arrivée a exactement un antécedent, on peut alors, définir une application en "sens inverse" : de B vers A et cette application est appelée fonction réciproque.

Cas des fonctions numériques
Une fonction bijective de $\mathbb{R}$ dans lui même, est une fonction strictement monotone c'est a dire soit strictement croissante soit stictement décroissante.

1.2 Image d'un intervalle par une fonction monotone et continue

On va définir le théorème des valeurs intermédiaires qui va jouer un grand rôle notemment dans la recherche de solution d'équations, tout d'abord, on admet les théorèmes suivants :

Théorème
L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle ; d'autre part, si f est strictement monotone et que l'intervalle est fermée, on a $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ (ou $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$) si f est décroissante.

Théorème de la valeur intermédiaire
Si f est monotone et continue, toutes valeurs $y \in f([a,b])$ sont atteinte exactement une fois par f, plus précisement : $\forall y \in$f([a,b]), $\exists!$c $\in [a,b], f(c) = y$

Théorème du passage par 0
Un cas particulier très important est obtenu quand $f(a)f(b) < 0$: dans ce cas 0 est entre $f(a)$ et $f(b)$ Le théorème dit alors que si f est strictement monotone et continue sur $[a,b]$ alors elle s'annulle exactement une fois, autrement dit, l'équation $f(x)$=0 possède exactement une solution sur $[a,b]$

1.3 Fonction réciroque, applications aux fonctions trigonométriques

Rappellons que si une fonction numérique f est stictement monotone sur un intervalle$I$, elle est bijective sur son image $f(I)$. Elle admet alors une fonction réciproque.

Graphe de la fonction réciproque

On montre que le graphe de la fonction réciproque d'une fonction f est symétrique par rapport à la première bissectrice.

Réciproques des fonctions trigonométriques

La fonction *cosinus* est strictement croissante de l'intervalle $[0, \pi]$ dans l'intervalle $[-1, 1]$ Elle admet donc une fonction réciproque de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi$ notée *arcos*
La fonction *sinus* est strictement decroissante de l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ dans l'intervalle $[-1, 1]$ Elle admet donc une fonction réciproque de $[-1, 1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$ notée *arcos*
La fonction *tangente* est strictement croissante de l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ dans l'intervalle $]-1, 1[$ Elle admet donc une fonction réciproque de $]-1, 1[$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$ notée *arctan*