CNAM GEII première année
Mathématiques Cours 5 :
Variation d'une fonction numérique

Novembre 2011

1 Fonctions croissantes, décroissantes

1.1 Premières définitions, taux d'accroissement

On va donner plusieurs définitions permettant de prédire les variations d'une fonction.

Définition 1
On dit qu'une fonction est croissante (resp. décroissante) sur un intervalle I quand :
pour tout x, x' dans I $x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ (resp. $f(x) \geq f(x')$

Définition 2
On peut condenser ces définition en une seule :
On considère $\tau_{x,x'} = \dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x}$, le taux d'acroissement de f entre x et x', si il est positif la fonction f est croissante entre x et x', sinon elle est décroissante.

1.2 Dérivée en un point

Si on pose x=x_0, $x' = x_0 + h$, avec le langage des limites on peut voir ce qu'il advient quand h tend vers 0 (x' tend vers x).

Nombre dérivée en un point

On dit que f est dérivable en x_0 quand : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe.
On note cette limite $f'(x_0)$

Approximation linéaire d'une fonction en un point

On peut réecrire la définition précédente : $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)+\varepsilon(h)$, (où ε tend vers 0 avec h) on en déduit :

$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h), (h = x - x_0)$

Cette quantitée est l'approximation linéaire de f au voisinage de x_0

Remarque :
(Exercice :) A partir du résultat précédent, on montre : si f dérivable en x_0, elle est continue en ce point.

Opération sur les fonctions dérivables en un point
Il existe des fonctions dérivables, par exemple on peut montrer facilement que la fonction constante de valeur 1, ou la fonction identitée sont dérivables en tout points. Ainsi on peut montrer que toute fonction définie par une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition. a partir des propriétés suivantes : Si f, g sont dérivables en x_0, alors :
$f+g$, fg, f/g sont dérivable en x_0 si $g(x_0) \neq 0$

Quelques preuves

La somme de deux fonction dérivables en x_0 est dérivable en x_0 et
$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} =$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Les deux dernières limites existent et vallent respectivement $f'(x_0), g'(x_0)$

Le produit de deux fonction dérivables en x_0 est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

Mais, f est dérivable en x_0 donc continue (en x_0), par conséquent la dernière quantitée vaut :

$$f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$

1.3 Fonction dérivée

Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I, on construit ainsi une fonction, la fonction dérivée de f noté f'. le signe de cette fonction renseigne sur les variations de f en chaque point :
$f'(x) \geq 0$: f croissante au point x
$f'(x) \leq 0$: f decroissante au point x

Opération sur les fonctions dérivée
On a vu comment dériver une somme et un produit de fonctions en un point x_0, quand ce point varie , on en déduit les formules :
$(f+g)' = f' + g'$:
$(fg)' = fg' + gf'$:
$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Compositions des fonctions dérivée
On rappelle que la composition de deux fonctions est définie par :
$x \in D_f \mapsto f(x) \in f(D_f) \mapsto g(f(x)) \in g(f(D_f))$

On a : $(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)$.

1.4 Equation de la tangente en x_0

On veux determiner l'équation de la tangente à une courbe lisse (dérivable) en un point x_0

Théorème
L'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en un point x_0 est donnée par la formule :
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Preuve
On écrit le taux de variation entre $(x_0, f(x_0)$ et (x, y) sur la tangente :

$f'(x_0) = \dfrac{y - f(x_0)}{x - x_0}$ cela donne le résultat