CNAM GEII première année
Mathématiques Cours 3 :
Fonctions polynômes, fonctions rationnelles

Septembre 2011

1 Fonction polynôme de degré n

On considère une fonction noté p (pour polynôme). définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_0$, les a_i sont des coéfficients réels. Comme on l'a vu pour un polynôme du secon degré, Il peut être intéressant de décomposer ce polynôme en polynômes élémentaires : **irréductibles**. Donnons d'abord quelques exemples :

Exemple 1 :

$p_1(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x-1)(x-1)(x+1)(x+1)$
Ce polynôme se "casse" en quatre polynômes de degré 1

Exemple 2 :

$p_2(x) = x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$
Ce polynôme ne se casse pas en produit de polynômes de degré 1 sur $\mathbb{R}$: un polynôme de degré **trois** ne possède pas **trois racines** comme on pourrais l'imaginer. en revanche, en introduisant les nombres complexes, cela serais possible...

1.1 Factorisation d'un polynôme

Il y a un théorème d'analyse très important mais pas si aisé à démontrer par des moyens élémentaire. Ce théorème est le **théorème de d'Alembert** :

Théorème

Tout polynôme de **degré** n définit sur le corps des **nombres complexes** admet **au moins** une racine dans $\mathbb{C}$. (ce n'est évidement pas vrais sur le corps des nombres réels.

Nous ne démontrons bien sûr pas ce théorème ; il y a un cas, ou la démonstration est évidente...
Si le polynôme est de **degré impair** ! c'est du niveau de la terminale (même E.S). En deux mots, on sait que une fonction polynôme est **continue**, d'autre part les limites en plus et moins l'infini sont des **infinis de signe contraires** ! ; On applique alors le théorème des **valeurs intermédiaires** qui assure le résultat.
Un corollaire évident est le suivant :

Corollaire

Tout polynômes de degré n admet exactement n racines complexes.

on montre ce résultat par **récurrence**.

Théorème

On considère un polynôme à **coefficients réels** si z est **une racine** de ce polynôme, alors **son conjugé** $\bar{z}$ **aussi**.

La démonstration est façile ! :

Démonstration

il suffit de remarquer que $\bar{z}^n = \overline{z^n}$.
Alors : $\overline{a_n z^n + \dots a_1 z + a_0} = a_n \overline{z^n} + \dots a_1 \overline{z} + a_0 = a_n \overline{z}^n + \dots a_1 \overline{z} + a_0 = 0$ $\Box$

Application

On peut alors factoriser le polynôme par $(x - z)(x - \bar{z})$ or,
$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z}$: il sagit d'un polynôme de degré 2 a **coefficients réels**

Théorème de décomposition sur $\mathbb{R}$
Tout polynôme de degré n à coéfficients réels, se décompose en **produit** de **polynômes de degré 1** et de **polynômes de degrés deux** a **coéfficients réels**.

Démonstration
On applique le théorème de D'Alembert (dit **théorème fondamental de l'algèbre**) Il y a au moins une racine. si cette racine est **réelle**, on peut **factoriser** le polynôme par **un polynôme** de **degré** 1 ; si elle est **complexe**, on peut **factoriser** le polynôme par une **polynôme** de **degré** 2 à **coéfficients reels** (Théorème précédent). et on recommence....
A la fin on récupère un produit de polynômes qui sont de degrés 1 ou 2 $\square$

1.2 Division euclidienne de deux polynômes

Si on considère deux polynômes A et B de degré respectifs n et m avec $n>m$, alors il existe deux autre polynômes Q et R respectivement **quotient** et **reste**, de la **division euclidienne** de A par B tel que $A = BQ+R$ avec $deg(R)<deg(Q)$.
Exemple
Effectuons la division euclidienne de $A(x)= x^3+x^2+x+2$ par $B(x)=(x+1)$ on trouve : $x^3 + x^2 + x + 1= (x + 1)(x^2 + x + 1) + 1$
Calcul pratique
On pose la division comme pour les nombres entiers et on ordonne les polynômes par puissances décroissantes :

$$\begin{array}{ccccccc|ccccc}
x^3 & + & 2x^2 & + & 2x & + & 2 & x & + & 1 & & \\
 & & & & & & & - & - & - & & \\
x^3 & + & x^2 & & & & & x^2 & + & x & + & 1 \\
- & - & - & - & - & - & - & & & & & \\
 & & x^2 & + & 2x & + & 2 & & & & & \\
 & & x^2 & + & x & & & & & & & \\
 & & - & - & - & - & - & & & & & \\
 & & & & x & + & 2 & & & & & \\
 & & & & x & + & 1 & & & & & \\
 & & & & - & - & - & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & &
\end{array}$$

2 Fonctions rationnelles

Dans $\mathbb{R}$, on peut définir le sous ensemble $\mathbb{Q}$ des **nombres rationnels**, quotient de deux entiers. On peut de même définir le quotient de deux fonctions polynômes, on obtient ainsi l'ensemble des **fonctions rationnelles**.

Définition
On appelle fonction rationnelles le quotient de deux fonctions polynômes.

Forme canonique
Une fonction rationnelle admet une decomposition sous la forme d'une **partie entière** (polynôme) et d'une partie polaire sous la forme d'une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur :
$\frac{A(x)}{B(x)} = C(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$. On peut vérifier cela en faisant la division euclidienne.

Exemple
On reprend l'exemple précédent :

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x + 1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x + 1}$$

La partie polaire est dans ce cas mise sous forme canonique : un seul **pôle simple**, mais ce n'est pas toujours le cas. pour de nombreuses applications comme par exemple l'intégration des fonctions rationnelles, on doit aplliquer la méthode de la **décomposition en éléments simples** de la partie polaire c'est ce qui va nous occuper à présent.

2.1 Décomposition des fonctions rationnelles en éléments simples

On envisage la partie polaire d'une fraction rationnelle, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ alors le degré du numérateur est inférieur a celui du dénominateur ; Le polynôme $Q(x)$ se factorise donc d'après les résultats précédents en produit de polynômes de degrés un, ou deux : Q((x) possède **uniquement** des facteurs $(x - \alpha)^n$: pôles simples et des facteurs $(x^2 - px + q)^m$ **irréductibles** $(p^2 - 4q < 0)$. On admet le théorème suivant :

Théorème

La fractions rationnelles $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est une somme de termes

$\dfrac{\alpha_i}{(x-\alpha)^i}$, $i = 1, ...n$ pour chaque facteur $(x-\alpha)$

$\dfrac{\beta_i x + \gamma_i}{((x^2 - px + q)^j}$, $j = 1, ...m$ pour chaque facteur $(x^2 - px + q)$

Determination des coefficients

Pour determiner tous les coefficients α puis tous les coefficients β, γ, on peut procéder par identification dans les cas simples, Si il y a trop de coefficients, on utilise certaines astuces simplificatrices que nous détaillerons dans les exemples.

Exemple d'application

1) décomposer en éléments simples : $\dfrac{2x}{x(x^2-1)}$

On a trois pôles simples x, $x-1$, $x+1$

$\dfrac{2x+1}{x(x^2-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$

On multiplie par $x+1$ et on fait $x = -1$, on obtient le coefficient c : $c = -1/2$

On multiplie par $x-1$ et on fait $x = +1$, on obtient le coefficient b : $b = 3/2$

On multiplie par x et on fait $x = 0$, on obtient le coefficient a : $a = -1$

finalement :

$$\frac{2x+1}{x(x^2-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{3/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}$$