CNAM GEII première année Mathématiques Cours 2 : Nombres complexes

Septembre 2011

1 Introduction

L'étude de la fonction polynôme du second degré a motivée l'introduction d'un nouvel ensemble de nombres le **corps** des **nombres complexes** qui **étend** celui des nombres réels. Brièvement un corps est un ensemble sur lequel on peut introduire deux opérations une **addition** et une **multiplication** avec lesquelles on a les règles de calcul habituelles : **indépendance du parenthésage** (associativité), commutativité, et ou l'on peut toujours définir un **opposé** et un **inverse**. (en clair on peut **soustraire** et **diviser**)

1.1 Nombres complexes

On peut considérer le simple fait suivant : la résolution de l'équation $x^2 + 1 = x^2 - (-1) = 0$ avec l'hypothèse que -1 est le carré d'un nouveau nombre $i = (\sqrt{-1})$ on a l'identité remarquable $x^2+1 = x^2 - (i)^2$ ainsi x^2+1 se factorise dans un ensemble de nombres plus gros et
$x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$

Définition
L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble des nombres $z = a + bi$ avec a, b deux nombres réels.
a est la **partie réelle** de z notée $\mathfrak{R}(z)$
b est la **partie imaginaire** de z notée $\mathfrak{I}(z)$

1.2 Propriétés élémentaires

Tout d'abord on doit définir les règles du calcul algèbrique :

Somme et produit de deux nombres complexes
On définit simplement la **somme** de deux nombres complexes par :
$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

On vérifie et **cela est très important** que si les nombres complexes sont réels, on retrouve l'addition **classique** des nombres réels

On définit le **produit** de deux nombres complexes par :
$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

là aussi, on vérifie et **cela est très important** que si les nombres complexes sont en réels, on retrouve la multiplication **classique** des nombres réels

Conjugé d'un nombre complexe
Soit $z = a + bi$ un nombre complexe, **le conjugé** de $z = a + bi$ est le nombre $\bar{z} = a - bi$

Remarque, inverse d'un nombre complexe
on montre facilement que :

$z\bar{z} = a^2 + b^2$ cette dernière quantité est le carré du module du nombre complexe z noté $|z|$.

On utilise souvent la formule $z\bar{z} = |z|^2$ Cela permet de définir l'**inverse** du nombre complexe z, c'est $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Il ne faut pas hésiter à recourir à une représentation géométrique ; le support visuel peux aider à la résolutions des problèmes quand ceux-ci sont compliqués :

Représentation géométrique

on peut associer au nombre complexe $z = a + bi$, les coordonnées (a, b) d'un point M du plan ou celle du vecteur $\overrightarrow{OM}$. on dit alors que z est l'**affixe** de M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$

$z = a + ib$ est aussi appelé la **représentation cartésienne** du nombre complexe z

Si on pense alors a z comme au vecteur $\overrightarrow{OM}$, le module du nombre complexe z est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$: $|z| = ||\overrightarrow{OM}||$

De même que l'on peut représenter un point soit dans des coordonnées cartésiennes soit en coordonnées polaires on a une autre représentation des nombres complexe dit **representation trigonométrique**, ou **exponentielle**

1.3 Représentation trigonométrique

Considérons la représentation cartésienne d'un nombre complexe $z = a + bi$, on peut écrire :

$z = \sqrt{a^2 + b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i)$
mais :
$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}})$
$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}})$

Dans cette écriture, $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unité de l'axe des absisses dans le plan $\mathbb{R}^2$, z est l'affixe du point M. Cela permet de remarquer qu'un nombre complexe est entièrement determiné par son **argument** :
$arg z = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}})$ noté θ et son **module** : $\rho = |z|$

On écrit alors z= $\rho(cos\theta + isin\theta)$

Produit de deux représentations trigonométriques, formule de Moivre

posons :

$z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isin\theta_1)$
$z_2 = \rho_2(cos\theta_2 + isin\theta_2)$

Alors :

$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[(cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2) + i(cos\theta_2 sin\theta_1 + cos\theta_1 sin\theta_2)]$

On reconnait des **formules de trigonométrie** classiques et :

$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + isin(\theta_1 + \theta_2)]$

Cas particulier

Si $z_1 = z_2 = z = \rho(cos\theta + isin\theta)$, on trouve :
$z^2 = \rho^2(cos2\theta + isin2\theta)$

Plus généralement :
$z^n = \rho^n(cosn\theta + isinn\theta)$

Cette dernière formule : $[\rho(cos\theta + isin\theta)]^n = \rho^n(cosn\theta + isinn\theta)$
s'appelle **formule de moivre**