CNAM GEII première année
Mathématiques Cours 12 :
Autoour de la formule de Taylor Lagrange

Mars 2012

Théorème de Taylor Lagrange

On considère une fonction f définie continues sur un intervalle [a,b] et dont les dérivées jusqu"a l'ordre n sont continues sur sur un intervalle]a,b[, et que la dérivée d'ordre "$k+1$" existe. alors on a le théorème :

Théorème

Soit une fonction satisfaisant aux hypothèses précédentes :

Théorème de Taylor Lagrange **il existe** un réel c dans $]a, b[$ tel que
$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + ... + \dfrac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dfrac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

Preuve

Il suffit de se rammener au théorème de Rolle, on pose :
$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + ... + \dfrac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dfrac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} A$, $A \in \mathbb{R}$
et on considère la fonction :
$\phi(x) = f(b) - \{f(t) + (b-t)f'(t) + ... + \dfrac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) + \dfrac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} A\}$

On montre que ϕ satisfait les hypothèses du théorème de Rolle.

Exercices d'applications

exercice1

(formule de Taylor Lagrange) Soit f une fonction de variable reelle deux fois dérivables telle que :

$\forall x \in \mathbf{R}, f''(x) \geq 0$

montrer que si, $f'(0) > 0$ alors $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

exercice 2

(formule de Taylor Lagrange) Soit f une fonction de variable reelle deux fois dérivables majorée et telle que :

$\forall x \in \mathbf{R}, f''(x) \geq 0$

montrer que f est constante.

exercice 3

Montrer que la formule des accroissements finis est cas particulier de la formule de Taylor-Lagrange.

exercice 4

En utilisant la formule de taylor, determiner un polynôme P du troisième degré sachant que $P(2) = 1,\ P'(2) = 1,\ P"(2) = 2,\ P(0) = -1.$

exercice 5

On considère f deux fois dérivables sur $]a, +\infty[$

on suppose que f et f'' sont bornées sur $]a, +\infty[$ et on nomme M et M'' leurs valeur maximum sur l'intervalle précedent.

a) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x + 2h$ $x > a$, $h > 0$.

b) En déduire une majoration de $|f'(x)|$ en fonction de M et M'' et h.

c) Etudier $\varphi(h) = hM'' + \frac{M}{h} sur]0, +\infty[$.

d) Déduire de la question précedente que $\forall x > a, |f'(x)| \leq 2\sqrt{MM''}$

e) Application : Soit g une fonction deux fois dérivable telle que g'' soit bornée et que g tende vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Montrer que $\lim_{x \to \infty} g'(x) = 0$