CNAM GEII première année
Mathématiques Cours 10 :
Equations différentielles

Janvier 2012

1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation du type $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$ (*)

1.1 Algorithme de résolution

Si y_0, y sont deux solutions de l'équation (*) alors on montre sans mal que la différence des deux solutions est solution de l'***équation homogène*** $a(x)z' + b(x)z = 0$ (**).
Donc toute solution s de l'équation différentielle est obtenue en ajoutant une solution particulière a toutes les solutions de l'équation homogène (on parle aussi de l'équation sans second membre) : $y = y_0 + z$

1.2 Recherche des solutions de l'équation homogène

Considérons l'équation homogène (**) resolvons cette équation sur un intervalle sur lequel $a(x)$ ne s'annulle pas alors :

$\dfrac{z'}{z} = -\dfrac{b(x)}{a(x)}$ et par intégration :

$ln|z| = -\int \frac{b(x)}{a(x)}dx + C$ d'où :

$z = \lambda exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx), \lambda \in \mathbb{R}$

1.3 Solution particulière, et solution générale

On peut determiner une solution particulière "à la main " c'est le cas quand le membre $c(x)$ est une fonction polynôme ou bien un polynôme d'exponentielle. Cependant cette méthode ne marche pas toujours. une alternative est d'utiliser la méthode de la variation de la constante.

Variation de la constante

On pose : $y = \lambda(x)exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx), \lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $y' = \lambda'(x)exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx) - \lambda(x)\frac{b(x)}{a(x)}$

En remplaçant dans l'équation (*)il vient :

$a(x)\{\lambda'(x)exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx) - \lambda(x)\frac{b(x)}{a(x)}exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx)\} + b(x)\{\lambda(x)exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\} + c(x) = 0$

En simplifiant il vient :

$$\lambda'(x) = -\frac{c(x)}{a(x)\{exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx)}$$

Le problème est de pouvoir intégrer cette fonction ; si on peux alors :

$\lambda(x) = -\int \frac{c(x)}{a(x)\{exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx)} + Constante$ et **la solution générale de l'équation (*)** est donnée par :

$$y = \{-\int \frac{c(x)}{a(x)\{exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx)} + Constante\}exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx)$$

1.4 Cas des coéfficients constants

Un cas particulier, traité au lycée, est celui ou $a(x) = a, b(x) = b, c(x) = c$ sont des constantes Alors la solution de l'équation différentielle $ay' + by + c = 0$ est facile a determiner :
c'est : $y = \lambda exp(-\frac{b}{a}) - \frac{c}{b}$

2 Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Nous ne traiterons que le cas des équations à coéfficients constants : l'équation différentielle à résoudre est alors : $ay" + by' + cy + d(x) = 0$ (*)
Seul d(x) est une fonction.

2.1 Algorithme de résolution

Comme pour l'équation du premier ordre, on peut montrer que l'ensemble des solutions de l'équation est la somme d'une solution particulière et de toutes les solutions de l'équations homogène : $az" + bz' + cz = 0$ (**)

2.2 Recherche des solutions de l'équation homogène

Un résultat admis est que l'espace des solutions de l'équation différentielles homogène est un espace vectoriel de dimension 2 et il suffit donc de trouver deux solutions indépendantes : z_1, z_2, l'ensemble des solution de l'équation homogène est alors : $z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$
On recherche s'il existe des solutions sous formes exponentielles : $z = exp(rx)$, r constante.
En remplaçant dans l'équation (**) il vient :
$ar^2 + br + c = 0$
Si Δ, le discriminant de cette équation du second degré est stictement positif, on a deux solutions distinctes $z_1 = exp(r_1 x), z_2 = exp(r_2 x)$ réelles
Si Δ, le discriminant de cette équation du second degré est stictement négatif, on a deux solutions distinctes $z_1 = exp(r_1 x), z_2 = exp(r_2 x)$ complexes
Si Δ, le discriminant de cette équation du second degré est nulle, on a une seule solution$z_1 = exp(rx)$ réelles, il faut trouver une nouvelle solution, on montre que $z_2 = xexp(rx)$ est cette autre solution :
$z_2' = exp(rx) + rxexp(rx)$, $z"_2 = 2rexp(rx) + r^2 xexp(rx)$

En remplaçant dans l'équation :
$a(2rexp(rx) + r^2xexp(rx)) + b(exp(rx) + rxexp(rx)) + cxexp(rx)$=0
$x(ar^2 + br + c)exp(rx) + (2ar + b)exp(rx) = 0$

Et comme r est une racine double de l'équation du second degré, $ar^2+br+c = 0$ et $2ar + b = 0$; on en déduit le résultat.

2.3 Solution particulière, et solution générale

Dans le cas ou le le terme $d(x)$ est un polynôme, ou un polynôme de fonctions exponentielles, on peut chercher une solutions particulière sous forme d'un polynôme, ou d'une fonction exponentielle adécquate. cela sera traité dans les exercices