CNAM GEII première année
Mathématiques Cours 1 :
Second degré

Septembre 2011

1 Polynôme du second degré

On considère une fonction noté p (pour polynôme). définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, c sont des coéfficients réels Il peut être intéressant de factoriser ce polynôme dans le but par exemple de résoudre de manière exacte l'équation $p(x) = 0$.

Factorisation d'un polynôme du second degré

on a :
$p(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + 2\dfrac{b}{2a}x + \dfrac{c}{a})$

Dans la première partie on reconnait le début d'une **identité remarquable**. il vient :

$p(x) = a[(x + \dfrac{b}{2a})^2 - (\dfrac{b}{2a})^2 + \dfrac{c}{a}]$

$p(x) = a[(x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$ (*)

Si $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif, on peut écrire

$p(x) = a[(x + \dfrac{b}{2a})^2 - ((\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})^2]$

On reconnait une **seconde identité remarquable** : la troisième finalement on a :

$$p(x) = a[x - x_1][x - x_2]$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Introduction des nombres complexes

Dans le cas ou $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif, on peut faire la même factorisation, mais il faut introduire un nouveau nombre "imaginaire" car la racine carré d'un nombre reel négatif n'existe pas. on a alors en utilisant les propriétés de la racine carrée :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-1}\sqrt{-\Delta}$$

On pose $i = \sqrt{-1}$ c'est un **nombre imaginaire**, il engendre l'axe des nombres imaginaires que l'on représente de manière usuel comme orthogonal à l'axe réel. On vera plus tard dans ce cours qu'il est utile de définir des nombres "complexes", c'est a dire constitués d'une partie réelle et d'une **partie imaginaire** dont le carrée a la propriété d'être **négatif**.

Un tel nombre s'écrit $z = a + bi$ où a et b sont des nombres réels et i est le nombre imaginaire $i = \sqrt{-1}$

On peut représenter les nombres complexes graphiquement dans un plan : le plan complexe en bijection avec le plan $\mathbb{R}^2$.

Dans le cas ou Δ est **négatif**, il n'y a **pas de solution réelles**, mais en en étendant $\mathbb{R}$ (droite réelle) au plan complexe $\mathbb{C}$, on retrouve le fait qu'une fonction polynôme de degré 2 admet deux **zeros**!.

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Etude de la fonction polynôme du second degré

Commençons par étudier le signe du trinôme du second degré $p(x) = ax^2 + bx + c$. on a :

-Si $\Delta < 0$ l'**équation du second degré** $p(x) = 0$ n'a pas de racines **réelles** (il ne s'annule jamais) On peut remarquer que sa limite au voisinage de $\pm\infty$ est $signe(a)\ \times +\infty$. Conclusion son signe est celui de a

-Si $\Delta = 0$ l'équation du second degré n'a qu'une racine (double) : $p(x) = a(x - x_1)^2$ par consequent p est encore du signe de a

-Si $\Delta > 0$ l'équation du second degré $p(x) = 0$ a exactement deux racines distinctes.Si on construit un tableau de signes, on en déduit que si a est **positif** p est **positif** à l'**exterieur** des racines et que si a est **negatif** p est **negatif** à l'**exterieur** des racines.

Somme et produit des racines de l'équation du second degré.

-Un simple calcul montre que la somme des racines est $S = -\frac{b}{a}$
-En utilisant la troisième identité remarquable on trouve le produit : $P = \frac{c}{a}$

Application

1) On peut reconnaître la **somme** et le **produit** en factorisant $p(x)$ par a :
$p(x) = a(x^2 - Sx + P)$

2) Si on connait une racine (**évidente**) de l'équation $p(x) = 0$ on peut connaitre l'autre racine.

Variations de la fonction polynôme du second degré.

On rappelle qu'une fonction f est **croissante** sur un intervalle I si : pour x, x' appartenant à I, $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$.

Considérons l'intervalle $I = [-\frac{b}{2a}, +\infty]$, $x, x' \in I$, a partir de (*) On a :
$p(x') - p(x) = a[(x' + \frac{b}{2a})^2 - (x + \frac{b}{2a})^2]$

$p(x') - p(x) = a[(x + x' + \frac{b}{a})(x' - x)]$

Comme x, x' appartiennent à I le premier facteur est positif, et comme $x' > x$ le second aussi ; donc si a est positif, p est **croissante** sur I, Si a est négatif, p est décroissante sur I.

On montre en prenant le **complementaire** de cet intervalle $]-\infty, -\frac{b}{2a}]$, que p est décroissante si a positif sur cet intervalle, croissante pour a négatif.