

# Géométrie du sigma-modèle (2,2)- supersymétrique et symétrie miroir

## Séminaire renormalisation-supersymétrie IMJ

Philippe Durand

19 février 2004

### 1 Introduction

La théorie des cordes offre le plus bel exemple de la non vacuité de l'ensemble **PHYSIQUE**  $\cap$  **MATHEMATIQUES**. On peut aller beaucoup plus loin et affirmer que les mathématiques les plus récentes sont nécessaires à une bonne compréhension de la physique moderne. Le calcul différentiel et intégral date de Newton, La géométrie différentielle et riemannienne (relativité générale) ne décrit notre monde à l'échelle classique, mais quand est franchie la barrière de la distance de Planck ( $10^{-33}$  cm), un monde de paradoxe s'offre au visiteur curieux ! Les mathématiques sont plus ardues ; l'arithmétique apporte son lot d'énigmes non encore résolues. Le langage récent de la géométrie algébrique s'impose, la topologie algébrique et les classes caractéristiques permettent d'appréhender l'aspect mathématique de la quantification en physique. Le langage des catégories est très bien adapté pour synthétiser tout le discours. On aimerait dans cet exposé informel donner un peu du dictionnaire entre le langage et les questions posés par la physique moderne d'une part et les réponses apportées en terme de mathématiques.

### 2 Supersymétrie, variétés de Calabi-Yau

. Pour bien comprendre le monde quantique il est commode d'introduire un "calculus" étrange fait de variables paires les variables bosoniques ou bosons qui décrivent le mouvement des particules classiques sans tenir compte de certaines symétries internes, et les fermions : variables fermioniques impaires. l'égalité  $impair \times impair = paire$  fait naître une nouvelle géométrie

revêtement à deux feuillets de la géométrie euclidienne, riemannienne ou lorentzienne : la géométrie spinorielle ; c'est en quelque sorte, une racine carrée de la géométrie classique. Elle a été décrite lors d'exposés précédents . Les variables de la supersymétrie sont donc de deux types : une partie bosonique paire qui correspond par exemple à une coordonnée classique et une partie fermionique, impaire décrite par des variables spinorielles (impaires). On verra que pour définir ce calculus : algèbre, géométrie, on a besoin d'une  $\mathbf{Z}_2$ -graduation, les variables classiques se retrouvant dans la partie bosonique.

Un autre fait important est que notre monde macroscopique bien décrit par l'espace  $\mathbb{M}^{3,1}$  est aveugle aux dimensions cachées de l'ordre de grandeur de la distance de Planck. En fait pour satisfaire des exigences physiques : invariance conforme entre autre , les variétés Kählériennes à courbure de Ricci nulle rendent bien compte de monde quantique qui est actuellement vu par le produit :  $\mathbb{M}^{3,1} \times \mathbb{K}^6$  . La dimension complexe du dernier terme du produit est 3, cela qui explique l'attrait pour l'étude des variétés de Calabi-Yau de dimension 3 ; la lettre  $K$  est mise pour compacte ! La manière élégante de voir les choses est d'imaginer notre espace macroscopique comme la base d'un gigantesque fibré dont les fibres sont perceptibles en dessous de la distance de Planck et représente justement les variétés décrites ci-dessus. Par ailleurs, l'intérêt des mathématiciens pour ces variétés provient du fait que l'on peut en donner de multiples exemples provenant des algorithmes de la géométrie algébrique. On peut en construire beaucoup comme sous variétés d'un espace projectif complexe. On peut décrire brièvement une variété de Calabi-Yau comme étant une variété Kahlerienne Ricci plate, dont la première classe de Chern est nulle.

## 3 Théories de champs

### 3.1 Théories de champs classiques

La donnée d'une théorie de champs classiques est la donnée d'un "paquet"  $(\Sigma, M, \mu)$  et d'une action  $:S$  où :

$\Sigma$  est l'espace source, souvent une variété : pour la mécanique classique du point c'est l'axe temporel . Pour les théorie de champs conformes, la théorie des cordes c'est une surface de Riemann...

$M$  est une variété but.

$\mu$  est une fonctionnelle locale souvent notée  $x$  en mécanique classique . Elle représente la fonctionnelle d'évolution du point materiel dans la variété but. En théorie des cordes c'est l'évolution d'une corde sur l'image de la surface

de Riemann dans la variété  $M$ .

l'action comme d'habitude est l'intégrale d'un Lagrangien  $L$  pour la mécanique classique de la particule en liberté c'est

$$S(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(x) \text{ avec } L(x) = \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 dt$$

### 3.2 Théorie de champs quantiques

A la définition précédente il faut rajouter dans la phase de quantification une integrale de chemin : moyenne sur toutes les évolutions classiques possibles et des fonctions de corrélations . L'idée admise est que l'on connaît l'objet quantique seulement après avoir fait certaines mesures independantes qui sont representées par exemples en théorie conformes par des points marqués d'une surface de Riemann subtilement liés aux diviseurs de la géometrie algébrique. A ce propos tout un pan des mathématiques utiles aux théorie de cordes s'interesse à l'ensembles (Espace de module) des courbes et applications stables .

### 3.3 Fonction de partition, fonctions de corrélations

Il faut donc rajouter à l'approche précédente la définition de la fonction de partition de la mécanique statistique :  $\int_{Map(\Sigma, M)} e^{-S(\mu)} \mathcal{D}\mu$

d'autre part on définit des corrélateurs :

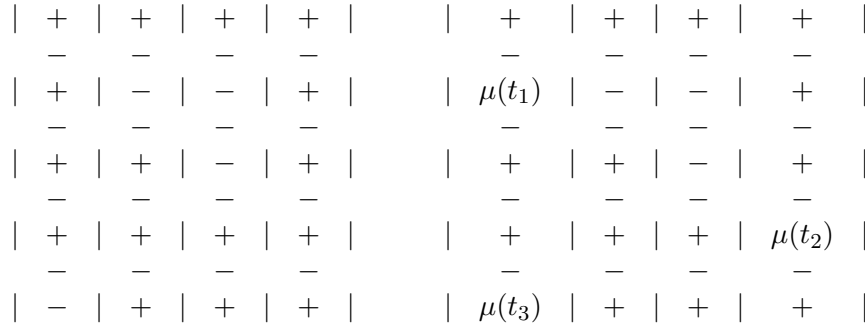
$$\langle \mu(x_1), \mu(x_2), \dots, \mu(x_n) \rangle = \frac{\int_{Map(\Sigma, M)} \mu(x_1) \dots \mu(x_n) e^{-S(\mu)} \mathcal{D}\mu}{\int_{Map(\Sigma, M)} e^{-S(\mu)} \mathcal{D}\mu}$$

On va envisager le modèle clé ci-dessous :

### 3.4 Exemple : Le modèle d'Ising

L'exemple le plus simple qui est le leitmotiv de la théorie de la renormalisation est le modèle bidimensionnel sur reseau representant autant d'echelles de discretisations différentes du  $\sigma$ -modele sur lequel opere la renormalisation telle qu'on la conçoit à ce jour. Le prototype d'école est le modèle d'Ising :

ici  $\Sigma$  est un reseau :  $\wedge$  et  $\mathbf{M} = +, -$



la figure de gauche represente le modèle d'Ising, celui de droite les corrélations de certains points du reseau qui representaient des valeurs forcés en quelque sorte de ces points du reseau.

Ici l'action est :  $S(\mu) = -\frac{\beta}{2\pi} \sum_{|t-s|=1} \mu(t)\mu(s)$

Les corrélateurs sont définis comme des valeurs moyennes en certains points du reseau :

$$\langle \mu(x_1), \mu(x_2), \dots, \mu(x_n) \rangle = \frac{\int_{\Sigma_{Map}(\Sigma, M)} \mu(x_1) \dots \mu(x_n) e^{-S(\mu)} \mathcal{D}\mu}{\int_{\Sigma_{Map}(\Sigma, M)} e^{-S(\mu)} \mathcal{D}\mu}$$

## 4 le sigma-modèle 2-2 supersymétrique

Le sigma modele non linéaire (2,2)-supersymétrique, provient d'une théorie des champs supersymétrique, pour laquelle l'espace source est une surface de Riemann de genre  $g$  et le but une variété Kalherienne de dimension complexe  $d$  (souvent 3 pour les applications à la physique) et de Calabi-Yau. Le lagrangien peut s'exprimer de deux manière différente mais exprime la même physique. Il sagit des modèles  $A$  et  $B$  de Witten Ces deux représentation sont duale en un certain sens l'une de l'autre c'est ce que l'on appelle la symétrie miroir. la première expression du lagrangien voit la physique sous l'angle des fonctions de correlations décritent plus haut il sagit du modèle  $A$  de Witten , Le lagrangien prend la forme :

$$\mathcal{L} = \int d^2z (\frac{1}{2} G_{i,j} \partial_z x^i \partial_{\bar{z}} x^j + i G_{I\bar{J}} \psi_z^I D_z \chi^{\bar{J}} + i G_{\bar{I}J} \psi_z^{\bar{I}} D_{\bar{z}} \chi^J - R_{I\bar{I}J\bar{J}} \psi_z^I \psi_z^{\bar{I}} \chi^J \chi^{\bar{J}})$$

Les variables grecques sont fermioniques les autres bosoniques. Les variables fermioniques appartiennent au monde de la supersymetrie. Les idées de la symétrie miroir proviennent essentiellement de la physique des transitions de phases : modèle de Landau Ginzburg ; il contient en gestation toutes les idées de la symétrie miroir en commençant par les orbifolds .Il développe un anneau particulier l'anneau Chiral bien connu des géomètres algébrique : l'anneau des polynômes Homogènes à poids.

Si on connaît beaucoup de physique, l'expression du lagrangien se simplifie énormément quand on accepte de parler de la cohomologie B.R.S.T, sorte de quantification de la cohomologie de De Rham si l'on se réfère au modèle A de Witten. Si on se réfère au modèle B du même auteur à travers la symétrie miroir, cette même cohomologie serait en revanche la quantification de la cohomologie de Dolbeault. Voici l'expression de l'action vue précédemment en fonction de l'opérateur de cohomologie BRST,  $Q$  nommé aussi charge topologique, et le fermion de gauge  $V$  :

$$\mathcal{L} = \int_{\Sigma} \{Q, V\} (\frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}) + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} f^*(\omega)$$

Le dernier terme est un terme topologique lié au volume de la variété de Calabi-Yau Le premier terme est à minimiser. Il atteint son minimum pour des courbes complexes d'un genre particulier étudiées par Gromov les courbes pseudo holomorphes. en terme d'énergie ce sont justement des courbes d'énergie minimale

Pour ce modèle de supersymétrie, les fonctions de corrélations peuvent être déclinées en un modèle simple, la fonction de corrélation à trois points : couplage de Yukawa qui symbolise la surface de Riemann moins trois points. (L'idée de base en théorie topologique des champs est de voir une surface de Riemann comme une somme connexe de pantalons). Selon le principe du modèle A cette fonction de corrélation est développée en série comme une somme d'intégrales de Feynmann. dans ce développement les termes indicés par une classe de cohomologie non nulle sont pondérés par des coefficients représentant des invariants topologiques . Ces termes comptent le nombre de courbes pseudo-holomorphes appartenant à la classe de cohomologie non nulle en question. Ce sont les invariants de Gromov-Witten ; on donne ci-dessous, l'expression des fonctions de corrélations :

$$\langle \mathcal{O}_{\omega_1}, \mathcal{O}_{\omega_2}, \dots, \mathcal{O}_{\omega_n} \rangle = \int_X \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n + \sum_{\gamma} N_{\gamma, \omega_i} q^{\gamma}$$

Ici  $N_{\gamma, \omega_i}$ , compte le nombre d'applications holomorphes de la surface de Riemann vers la variété de Calabi-Yau ambiante, appartenant à la classe de cohomologie  $\gamma = f_*(\Sigma)$ . Pour les applications de  $\mathbf{P}^n$  dans  $\mathbf{P}^m$ , la classe de cohomologie désigne bien sur le degré de l'application. Pourquoi du dénombrement, car on verra dans un prochain exposé que la dimension de l'espace des modules associé aux applications holomorphes précédentes, est de mesure nulle autrement dit de dimension 0.

La fonction de corrélation se décline très souvent, en partie élémentaires la fonction de corrélation à trois points. Du point de vue de la physique, Cela traduit le fait que l'on décrit le monde des interactions entre particules en trois familles non nécessairement distinctes. . Du point de vue du modèle standard, ces trois générations, représentent : force électriques, nucléaire forte et faibles.

Il est bien connu qu'une quintique  $V$  de  $\mathbf{P}^4$  est de Calabi-Yau . Si  $H$  désigne la classe d'un hyperplan, La fonction de corrélation a trois points, s'écrit :

$$\langle H, H, H \rangle = 5 + \sum_{d \geq 1} n_d d^3 \frac{q^d}{1-q^d}$$

$n_d$  compte les courbes holomorphes de degré  $d$ .

Ce prototype est le prototype "jouet de la physique". Cette quintique à de bonne propriétés, elle est de dimension complexe 3 on retrouve les dimensions cachés dans lesquelles s'excitent les supercordes. Malheureusement pour cette variété, les invariants de Gromov- Witten sont inconnus pour des degrés élevés.

Le Passage du lagrangien aux fonctions de corrélations peut paraître un peu obscure ; c'est du au fait que dans le cadre de la supersymétrie on mélange variables bosonique et fermionique les étapes sont un peu noyées dans l'écriture. On peut voir simplement les chose en ne considérant que la partie bosonique du Lagrangien : l'action est

$$S(f) = \int_{\Sigma} \|\bar{\partial}_J f\|^2 + \int_{\Sigma} f^*(\omega).$$

Ecrivons alors, l'intégrale de chemin :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{P_1}, \mathcal{O}_{P_2}, \dots, \mathcal{O}_{P_k} \rangle &= \int_{Map(\Sigma, M)} \mathcal{D}\varphi \mathcal{O}_{P_1} \mathcal{O}_{P_2} \dots \mathcal{O}_{P_k} e^{2\pi S(f)} \\ &= e^{2\pi \int_{\Sigma} f^*(\omega)} \int_{Map(\Sigma, M)} \mathcal{D}\varphi \mathcal{O}_{P_1} \mathcal{O}_{P_2} \dots \mathcal{O}_{P_k} e^{2\pi \int_{\Sigma} \|\bar{\partial}_J f\|^2} \end{aligned}$$

Par l'invariance conforme de la métrique on peut introduire dans  $g$  un paramètre  $t$  et faire tendre  $t$  vers plus l'infini, le dernier terme de l'expression précédente s'écrit alors :

$$e^{2\pi \int_{\Sigma} f^*(\omega)} \int_{Map(\Sigma, M)} \mathcal{D}\varphi \mathcal{O}_{P_1} \mathcal{O}_{P_2} \dots \mathcal{O}_{P_k} e^{2\pi t \int_{\Sigma} \|\bar{\partial}_J f\|^2}$$

Seul, les applications holomorphe apportent alors une contribution à l'intégrale précédente ( $\bar{\partial}_J f = 0$ ). Alors en décomposant sur la classe de cohomologie  $\alpha$  de l'application ( penser dans le cas des projectifs complexe au degré), on à :

$$\langle \mathcal{O}_{P_1}, \mathcal{O}_{P_2}, \dots, \mathcal{O}_{P_k} \rangle = \sum_{\alpha} e^{2\pi \int_{\Sigma} f^*(\omega)} \int_{Map(\Sigma, M)} \mathcal{D}\varphi \mathcal{O}_{P_1} \mathcal{O}_{P_2} \dots \mathcal{O}_{P_n}$$

Il faut rappeler quelques base de géometries pour discuter un peu de symétrie miroir.

## 5 Géométrie différentielle, riemannienne.

### 5.1 Variété

Une variété différentielle est un espace topologique localement homéomorphe à  $\mathbf{R}^n$ . Les physiciens abusent beaucoup des coordonnées locales ainsi les propriétés et objets sont définies sur des ouverts de cartes que l'on recollent pour obtenir des propriétés globales.

### 5.2 Metrique

En coordonnées locales une metrique est la donnée de

$$ds^2 = g_{\mu, \nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

A partir de là on définit les géométries Riemannienne et Lorentzienne

### 5.3 Fibré vectoriel

A partir de la notion de variété on définit la notion de fibré :  
 $\pi : E \rightarrow M$ ,  $E, M$  variétés,  $\pi^{-1}(x)$  isomorphe à  $\mathbf{R}^k$ .

1. L'application  $\pi$  est  $C^\infty$
2. Pour  $x_0 \in M$ ,  $\exists U \ni x_0$  tel que :  
 $\varphi_u : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^k$  est un difféomorphisme.

L'exemple le plus classique est le fibré tangent à une variété. La fibre en un point de la variété est l'ensemble des vecteurs tangents en ce point à la variété.

## 6 Géométrie algébrique, géométrie complexe.

Une variété algébrique est définie par une équation polynomiale par exemple,

$$y^2 = x^3 + x^2$$

De manière générale, l'utilisation unique de la géométrie différentielle est insuffisant pour décrire la physique. On sait combien le corps des nombres complexe est utile en physique ; Par le théorème GAGA de Serre on sait que les variétés complexes sont un cas particulier de variétés algébriques pour lesquelles le corps de base est  $\mathbb{C}$ .

### 6.1 Variété complexe

Une variété complexe est une variété dont les ouverts de cartes vérifient : si  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbf{C}^n$ ,  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  est holomorphe sur l'intersection  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbf{C}^n$

### 6.2 Coordonnées locales

On pose  $z^j = x^j + iy^j$

on définit ainsi un système de coordonnées locales sur  $\mathbf{C}^n$  et quand on travaille avec ces coordonnées on s'intéresse aux propriétés affines des variétés. Pour des travaux plus poussés de géométrie algébrique on s'intéressera souvent aux propriétés projectives des variétés. Cela permet entre autre de pouvoir parler correctement d'intersection. On définira alors des coordonnées homogènes :



$$[Z_0, Z_1, \dots, Z_n] = [\lambda Z_0, \lambda Z_1, \dots, \lambda Z_n]$$

### 6.3 Fibré tangent en coordonnées

En notation de physicien, la dérivée directionnelle pour une variété réelle, est notée par :

$$V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

La base canonique étant  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\}$

Pour une variété complexe on considère les variables  $x, y$  ou  $z, \bar{z}$  dans le premier cas la base est donnée par :  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right\}$  dans le second, par  $\left\{ \frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} \right\}$  les variables  $z^j$  (resp.  $\bar{z}^j$ ) sont les variables holomorphes (resp. antiholomorphes).

### 6.4 Fibré tangent holomorphe

Un fibré holomorphe complexe est une application  $\pi : E \rightarrow M$ ,  $E, M$  variétés,  $\pi^{-1}(x)$  isomorphe à  $\mathbf{C}^k$ .

1. L'application  $\pi$  est  $C^\infty$
2. Pour  $x_0 \in M$ ,  $\exists U \ni x_0$  tel que :  
 $\varphi_u : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{C}^k$  est un bi-holomorphisme.

si  $k=1$  on parle de fibré en droites complexes, dans le langage de la géométrie algébrique on a une correspondance directe avec les diviseurs "élémentaires" et le groupe de Picard.

On définit alors les fonctions de transitions :

$$g_{uv}(x) \rightarrow \varphi_u \varphi_v^{-1}$$

Cette dernière application est dans  $GL(k, \mathbf{C})$

Ces dernières fonctions vérifient des conditions de cocycles bien connues. On montre que réciproquement si on se donne un recouvrement ouvert et des applications  $C^\infty$  vérifiant les conditions de cocycle on peut reconstituer le fibré précédent.

## 6.5 Fibré cotangent

Par dualité on définit le fibré cotangent réelle ou complexe. On note en coordonnées locales une base  $\{dx^i, dy^i\}$  ou  $\{dz^i, d\bar{z}^i\}$

On a les règles du type :  $\frac{\partial}{\partial z^i}.dz^j = \delta_i^j$

## 6.6 Structure presque complexe

On définit une application linéaire agissant sur le fibré cotangent par :

$$dx^\mu = J_\nu^\mu dx^\nu$$

$$J^2 = -1 \text{ i.e } J_\nu^\mu J_\zeta^\nu = -\delta_\zeta^\mu$$

Pour une variété complexe vue comme variété réelle ; on a

$$J.dx^k = -dy^k$$

$$J.dy^k = dx^k$$

d'autre part, on a en coordonnées complexes :

$$J.dz^k = idz^k$$

$$J.d\bar{z}^k = -id\bar{z}^k$$

Une structure presque complexe donne une structure complexe quand le tenseur de Nijenhuis s'annule :

$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y]$$

Où en coordonnées locales :

$$N_{bc}^a = J_b^d (\partial_d J_c^a - \partial_c J_d^a) - J_c^d (\partial_d J_b^a - \partial_b J_d^a)$$

## 6.7 Formes différentielles

On définit naturellement l'algèbre extérieure :  $\Lambda^* T_{\mathbb{C}}^* = \bigoplus_{p+q=n} (\Lambda^p T^* \otimes \Lambda^q \bar{T}^*)$

On déduit l'algèbre des formes (p,q) :  $\mathbf{A}^{p,q}(M) = \Lambda^p T^* \otimes \Lambda^q \bar{T}^*$

On a les règles de différentiation complexe :

$$\partial : A^{p,q} \rightarrow A^{p+1,q}$$

$$\bar{\partial} : A^{p,q} \rightarrow A^{p,q+1}$$

et l'opérateur de Dolbeault :  $d = \partial + \bar{\partial}$

$$\text{Cohomologie de de Rham} : H_{dR}(M) = \frac{\text{Ker } d}{\text{Im } d}$$

$$\text{On note nombres de Betti} : b_n = \dim H_{dR}^n$$

$$\text{Cohomologie de Dolbeault} : H_{\bar{\partial}}(M) = \frac{\text{Ker } \bar{\partial}}{\text{Im } \bar{\partial}}$$

$$\text{On note nombres de Dolbeault} : h_{p,q} = \dim H_{\bar{\partial}}^{p,q}$$

## 6.8 Métrique et structures complexes

On rappelle l'expression de la métrique en coordonnées locale pour une variété réelle :

$$ds^2 = g_{\mu,\nu} dx^\mu dx^\nu$$

En coordonnées complexes cette formule devient :

$$ds^2 = g_{j,k} dz^j dz^k + g_{j,\bar{k}} dz^j dz^{\bar{k}} + g_{\bar{j},\bar{k}} dz^{\bar{j}} dz^{\bar{k}}$$

La métrique est Hermitienne si  $g_{j,k} = g_{\bar{j},\bar{k}} = 0$ .

## 6.9 Variété Kählerienne

Une variété complexe est Kählerienne si  $dJ = 0$ .

On a les relations suivantes

$$H_{dR}^k(M, \mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$$

$$\text{On déduit } b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}$$

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q} = \overline{H_{\bar{\partial}}^{q,p}}$$

C'est à dire :  $h^{p,q} = h^{q,p}$  et la dualité de Poincaré donne :

$$h^{p,q} = h^{n-p,n-q}$$

On a aussi le diamant de Hodge :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & h^{0,0} & & \\
 & & & & & & \\
 & & & h^{1,0} & & h^{0,1} & \\
 & & h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & h^{n,n-2} & & h^{n-1,n-1} & & h^{n-2,n} \\
 & & & h^{n,n-1} & & h^{n-1,n} & \\
 & & & & h^{n,n} & & 
 \end{array}$$

Dans le diamant de Hodge la somme des coefficients d'une ligne donne les nombres de betti.

## 6.10 Faisceaux

Quand on fait de la géométrie différentielle, la notion de fibré est suffisante, le prolongement des sections grâce aux partitions de l'unité ne pose pas de problème. En revanche c'est un souci en géométrie algébrique, un nouvel outils s'impose : les faisceaux.

## 6.11 Définition

$X$  est un espace topologique

un faisceau vérifie les propriétés suivantes :

1. Associer un groupe  $\mathcal{F}(u)$  à chaque ouvert  $U \subset X$ .
2. si  $U \subset V$  on a l'application de restriction  $r_{VU} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ .
3. si  $U \subset V \subset W$   $r_{WU} = r_{VU}r_{WV}$  Alors  $\sigma|_{V|U} = \sigma|_U$
4. si  $U, V \subset X$   $\sigma \in \mathcal{F}(U), \tau \in \mathcal{F}(V)$  tel que  $\sigma|_{U \cap V} = \tau|_{U \cap V}$   
alors  $\exists \rho|_U = \sigma, \rho|_V = \tau$ .
5. Si  $\sigma \in \mathcal{F}(U \cup V)$  et  $\sigma|_U = \sigma|_V = 0$ , alors  $\sigma = 0$ .

## 6.12 exemples

1. Si on associe  $\mathbf{Z}$  à tout ouvert  $U$ ,  $r_{V,U} = 1$  on obtient le faisceau constant  $\mathbf{Z}$
2. On peut obtenir de manière identique, les faisceaux constants  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$
3. Si  $X$  est une variété  $\mathcal{C}^\infty$  est le faisceau des fonctions sur  $U$   
 $\mathcal{A}^p$  le faisceau des p-formes.
4. Si  $X$  est une variété complexe,  $\mathcal{O}$  est le faisceau des fonctions holomorphes,  $\mathcal{A}^{p,q}$  le faisceau des (p,q)-formes

## 7 Un exemple, l'espace projectif

C'est une variété complexe, algébrique qui peut être recouverte par des ouverts affines. Elle possède une cohomologie particulièrement simple à calculer. Intéressons nous, pour l'instant aux propriétés de la variété analytique complexe :

Elle admet une métrique Hermitienne naturelle la métrique de "Fubini Study".

Soit  $U \subset \mathbf{P}^n$  un ouvert, et :

$Z \rightarrow \mathbf{C}^{n+1}$  un relèvement holomorphe

soit  $J = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log |z|^2$  une (1,1)-forme.

$J$  définit une forme de Kähler sur  $\mathbf{P}^n$  :

soit  $J = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} (1 + \sum_{i=1}^n |z_i|^2)$

D'après le théorème de Dolbeault, la cohomologie de Dolbeault est une résolution du faisceau des p formes :

$$H_{\bar{\partial}}^p(X) = H^q(X, \Omega^p).$$

On déduit par exemple pour l'espace projectif :

$$H^q(\mathbf{P}^n, \Omega^p) = H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathbf{P}^n) = \mathbf{C}^{\delta_{p,q}}.$$

En particulier, on a :

$$H^p(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}) = \mathbf{C}^{\delta_{p,0}}.$$

On utilisera ce resultat par la suite.

une application importante à la physique est le calcul de la cohomologie de l'espace projectif. Cela permet de trouver sous quelle condition une sous variété plongée dans  $\mathbf{P}^n$  est de Calabi-Yau. Faisons quelques rappels d'algèbre homologique d'abord.

## 8 Algèbre Homologique

### 8.1 Complexes, suites exactes

**Définition.** On appelle complexe  $C$  de  $R$ -modules la famille  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  avec

$$\dots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \dots$$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{Z}, \partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

On a donné une version homologique de cette définition, il existe de même une version cohomologique :

On appelle complexe cohomologique  $C^\cdot$  de  $R$ -modules la famille  $\{C^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  avec

$$\dots \longrightarrow C^{n-2} \xrightarrow{\delta^{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \dots$$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{Z}, \delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$$

On prend aussi en considération dans cette définition le cas des groupe abeliens en prenant pour l'anneau  $R$  l'ensemble  $\mathbb{Z}$ .

**Définition.** On appelle suite exacte un complexe verifiant :

$$\dots \longrightarrow X_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \dots$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \text{Ker } f_{n-1} = \text{Im } f_{n-2}$$

On appelle suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

$$\text{Ker}g = \text{Im}f$$

**Exemple :** Si  $f$  est un morphisme entre les  $R$ -modules  $M$  et  $N$  on a les deux suites exactes :

$$0 \longrightarrow \text{Ker}f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} \text{Coim}f \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \text{Im}f \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} \text{Coker}f \longrightarrow 0$$

$$\text{avec } \text{Coker}f = N/\text{Im}f$$

$$\text{Coim}f = M/\text{Ker}f$$

En particulier si  $M$  et  $N$  sont des espaces vectoriels :

$$M = \text{Ker}f \oplus \text{Coker}f \text{ et } N = \text{Im}f \oplus \text{Coim}f$$

On dit que la suite exacte "split", c'est faux pour les modules en général : existence d'une torsion. Voici deux exemples simples :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\times q} \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

**Définition.**  $\dots \longrightarrow X_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \dots$

$$\text{On note } H^n(X_\bullet) = \text{Ker}f_n / \text{Im}f_{n-1}$$

Ce quotient mesure le défaut d'exactitude du complexe c'est à dire la présence de (co)homologie.

**Théorème.** Etant donné un complexe  $X$ , il existe un invariant noté  $\chi(X)$ .  
 C'est la caractéristique d'Euler Poincaré du complexe :

$$\chi(X) = \sum (-1)^i \dim X_i = \sum (-1)^i \dim H_i(X)$$

**Exercice :** que retrouve t'on quand on considère le complexe issue de la suite exacte courte vue ci dessus dans le cas ou les modules sont des espaces vectoriels :

$$\longrightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/\text{ker } f \longrightarrow 0$$

On rappelle que  $M/\text{ker } f \simeq \text{Im } f$

## 8.2 Homologie simpliciale

On considère donc le complexe  $\mathcal{C}(\mathbb{K})$  associé aux n simplexes :

$$\dots \longrightarrow \mathcal{C}_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(\mathbb{K}) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathcal{C}_{n-2}(\mathbb{K}) \dots \xrightarrow{\partial_0} \mathcal{C}_0(\mathbb{K}) \longrightarrow 0$$

Soit  $\sigma_r = (p_0, p_1, \dots, p_r)$ , un r-simplexe orienté

$$\partial_r \sigma_r = \sum_{i=0}^r (-1)^i (p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_r)$$

$\partial_r$  vérifie les bonnes propriétés.

## 8.3 Cohomologie simpliciale

Par dualité on peut définir a partir des éléments du paragraphe precedent la cohomologie simpliciale :

Considerons l'ensemble  $\mathcal{C}^n(\mathbb{K}, \mathbb{R})$  des applications de  $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{R}$  On défini alors le complexe  $\mathcal{C}^\cdot(\mathbb{K}, \mathbb{R})$  en sens inverse :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{K}, \mathbb{R}) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1(\mathbb{K}, \mathbb{R}) \xrightarrow{d} \dots \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{K}, \mathbb{R}) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^n(\mathbb{K}, \mathbb{R}) \longrightarrow \dots$$

Soit  $\sigma_r = (p_0, p_1, \dots, p_r)$ , un r-simplexe orienté

$$\langle df, \sigma_r \rangle = \langle f, \partial_r \sigma_r \rangle = \sum_{i=0}^r (-1)^i f(p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_r)$$

par linéarité. Cette dernière expression n'est pas sans rappeler la formule



de Stoke... :

$$\int_{(p_0, p_1, \dots, p_r)} df = \int_{\partial_r(p_0, p_1, \dots, p_r)} f$$

On peut à partir des outils ainsi définis mais ce n'est pas l'objet du présent exposé définir l'homologie (et la cohomologie) singulière sur une variété ainsi que la cohomologie de de Rham

## 8.4 Cohomologie de Čech

On définit un recouvrement ouvert de  $M$   $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$

Alors on pose :

1.  $\check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_\alpha \mathcal{F}(U_\alpha)$
2.  $\check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha \neq \beta} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$
3.  $\check{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha \neq \beta \neq \gamma} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$

etc... Ce que l'on vient de définir sont les cochaines de Čech.

On définit les cobords par :

$$\delta : \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

$$\sigma \mapsto (\delta\sigma)_{i_0 i_1 \dots i_{p+1}} = \sum (-1)^i \sigma_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{p+1}} |_{U_{i_0} \cap U_{i_1} \dots \cap U_{i_p}}$$

$\sigma$  est un cocycle quand  $\delta\sigma = 0$ .

On vérifie par un calcul que  $\delta$  vérifie  $\delta^2 = 0$  donc définit un complexe.

Complexe de Čech :

$$0 \longrightarrow \check{C}^0 \xrightarrow{\delta^0} \check{C}^1 \xrightarrow{\delta^1} \check{C}^2 \dots$$

$$\check{H}^p(\overline{U}, \mathcal{F}) = \frac{\ker \delta_p}{\ker \delta_{p-1}}$$

On a le théorème de de Rham : la cohomologie de de Rham est obtenue comme la résolution de Čech du faisceau constant  $\mathbf{R}$  :

$$H_{dR}^p(M) = H^p(M, \mathbf{R})$$

## 8.5 Lemme du serpent

Etant donnée une suite exacte courte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

On peut par une chasse au diagramme dans le double complexe ci-dessous déduire une longue suite exacte qui permet le calcul de groupe de (co)homologie.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \check{C}^0 \mathcal{E} & \longrightarrow & \check{C}^0 \mathcal{F} & \longrightarrow & \check{C}^0 \mathcal{G} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \check{C}^1 \mathcal{E} & \longrightarrow & \check{C}^1 \mathcal{F} & \longrightarrow & \check{C}^1 \mathcal{G} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

Longue suite exacte de cohomologie :

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{E}) \rightarrow H^0(\mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathcal{G}) \rightarrow H^1(\mathcal{E}) \rightarrow \dots$$

## 8.6 Exemple : Cohomologie de de Rham sur un ouvert de $\mathbb{R}^k$ ou une surface

Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^k$  On a le complexe ci dessous :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^0(U) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1(U) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^2(U) \rightarrow 0$$

$\mathcal{C}^0(U)$  représente les fonctions continues sur l'ouvert  $U$

$\mathcal{C}^1(U)$  : les formes différentielles continues sur l'ouvert  $U$  de degré 1.

$\mathcal{C}^2(U)$  : les formes différentielles continues sur l'ouvert  $U$  de degré 2.

Si  $U$  est un ouvert étoilé il est bien connu que toute forme différentielle fermée est exacte autrement dit les groupes de cohomologies pour  $n \geq 1$  sont tous nul.

d'autre part  $H^0(\mathcal{C}^\cdot(U)) = \ker d$

Donc ce groupe de cohomologie donne les fonctions constantes :  $H^0(\mathcal{C}^\cdot(U)) \simeq \mathbb{R}$

**Remarque :** Si  $M$  est une variété elle peut être recouverte par des ouverts (de cartes) la cohomologie peut être calculée à partir du complexe de Čech dont une forme primaire est la suite exacte de Mayer Vietoris :

si  $M = U \cup V$ . Posons pour simplifier :  $H^n(\mathcal{C}^\cdot(U)) = H^n(U)$ , on a la longue suite exacte :

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(U \cup V) \longrightarrow \\ H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \longrightarrow H^{k+1}(U \cap V) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Par ce procédé on calcul les groupes de cohomologie de de Rham d'une variété différentielle.

## 9 Cohomologie de $\mathbf{P}^n$

Rappelons tout d'abord quelques faits sur les fibrés en droites issues des fonctions de transitions :

### 9.1 Fibrés en droite de $\mathbf{P}^n$

Spécifier une fonction de transition c'est se donner un élément  $\sigma$  de  $\check{C}^1(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}^*)$  où  $\mathcal{O}^*$  désigne le faisceau des fonctions non nulles. Un représentant  $[\sigma] \in H^1(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}^*)$  caractérise un fibré en droite. Ce premier groupe de cohomologie (de Čech classifie les fibrés en droites et se nomme le groupe de Picard.

On a la suite exacte exponentielle :

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

On déduit la suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H^1(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}) \rightarrow \dots$$

et de  $H^{1,2}(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}) = 0$ ;

$H^2(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$  On déduit :

$$H^1(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}^*) = \mathbf{Z}$$

## 9.2 Cohomologie des faisceaux $\mathcal{O}(k)$

On a le resultat suivant :  $H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(1)) = \mathbf{C}^{n+1}$

et plus g en eraleme nt :  $H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(k)) = \mathbf{C}^{\binom{n+k}{n}}$

D'autre part, pour  $0 < r < n$  :  $H^r(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(1)) = 0$

Et par dualité de Serre on a :  $H^n(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(k)) = H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(-k - n - 1))$

## 9.3 Quelques suites exactes courtes utiles

Si  $X$  est une hypersurface lisse de degré " $d$ " plongée dans  $\mathbf{P}^n$ , on a la suite exacte de l'hypersurface :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-d) \xrightarrow{\times f} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

On a aussi la suite exacte d'intersection complète : (Th. de Bezout pour les courbes) :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-d_1 - d_2) \xrightarrow{(f_2, -f_1)} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d_2) \xrightarrow{(f_1, f_2)} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

On verra que la première suite exacte sera très utile pour déterminer les "possibles" sous variétés de Calabi-Yau de  $\mathbf{P}^n$ .

# 10 Application a la determination de Variété de Calabi-Yau

Soit  $X$  plongée dans  $\mathbf{P}^n$  voyons à quelle condition  $X$  est de Calabi-Yau.

Rappelons que  $X$  est de Calabi-Yau si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1.  $X$  admet une metrique Ricci-plate
2.  $c_1(T_X) = 0$
3.  $K = \bigwedge^n \Omega_X$  est trivial
4.  $H^n(X, \mathcal{O}_X) = \mathbf{C}$

Considerons la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-d) \xrightarrow{\times f} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

La cohomologie des faisceaux  $\mathcal{O}(d)$  vue précédemment donne :

$$H^{n+1}(X, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-d)) = \mathbf{C}^{\mathbf{C}_{d-1}^{n+1}}$$

Le groupe suivant dans la longue suite est triviale par suite,

$$H^n(X, \mathcal{O}_X) = \mathbf{C}^{\mathbf{C}_{d-1}^{n+1}}$$

Donc d'après la quatrième relation ci dessus il faut prendre :  $d = n + 2$

On a alors :

1.  $n = 1$  les variétés de Calabi-Yau de  $\mathbf{P}^2$  sont les courbes elliptiques ( $d = 3$ )
2.  $n = 2$  les variétés de Calabi-Yau de  $\mathbf{P}^3$  sont les surfaces  $K3$  ( $d = 4$ ).
3.  $n = 3$  les variétés de Calabi-Yau de  $\mathbf{P}^4$  sont les quintiques de dimensions trois (Quintic tree-fold en anglais) ( $d = 5$ )

C'est ce dernier exemple qui fournit les variétés de Calabi-Yau utiles aux physiciens (Théorie des cordes).

### 10.1 Tangent à $\mathbf{P}^n$ , suite exacte d'Euler

On rappelle que  $Z_i = 0$  désigne l'équation d'un hyperplan  $H$  ; d'autre part toute équation linéaire  $f^i(Z_0, \dots, Z_n) = 0$  aussi.

L'espace tangent à  $\mathbf{C}^{n+1}$  est formé des vecteurs :

$$f^i(Z_0, \dots, Z_n) \frac{\partial}{\partial Z^i}$$

On a donc la suite surjective de fibrés :

$$\mathbf{H}^{\oplus(n+1)} \xrightarrow{f} \mathbf{T}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow 0$$

où la suite surjective de faisceaux :

$$\mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)} \xrightarrow{f} \mathcal{T}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow 0$$

On a aussi les suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow \mathbf{C} \xrightarrow{\times Z_i} \mathbf{H}^{\oplus(n+1)} \xrightarrow{f} \mathbf{T}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\times Z_i} \mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)} \xrightarrow{f} \mathcal{T}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow 0$$

l'exactitude en  $H^{\oplus(n+1)}$  (ou son équivalent faisceau) provenant du fait que

$$\sum Z_i \frac{\partial}{\partial Z_i} = 0 \text{ donne exactement le noyau de l'application } f.$$

On déduit par exemple la suite exacte longue ci dessous :

$$0 \rightarrow H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}) \xrightarrow{\times Z_i} H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)}) \xrightarrow{f} H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{T}_{\mathbf{P}^n}) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}) \rightarrow$$

On sait que  $H^1(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}) = 0$

$$\text{et } H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)}) = (\mathbf{C}^{n+1})^{n+1}, H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}) = \mathbf{C}$$

On déduit :

$$H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{T}_{\mathbf{P}^n}) = \mathbf{C}^{n^2+2n}$$

## 10.2 Formule d'adjonction, déformations

Ce dernier paragraphe va nous permettre de prédire le nombre de déformations de structures complexes codé par  $H^1(X, \mathcal{T}_X)$  Si  $X$  est une hypersurface de  $W = \mathbf{P}^n$ , on a la suite d'adjonction :

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{T}_{W|X} \rightarrow \mathcal{O}(d)|_X \rightarrow 0$$

et par dualité :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-d)|_X \rightarrow \Omega_{W|X} \rightarrow \Omega_X \rightarrow 0$$

Si  $X$  est Calabi Yau  $\wedge^n(\mathcal{T}_X)^*$  est trivial et cela signifie :

$$\wedge^d \mathcal{T}_X \simeq (\Omega_X)^{n-d}.$$

Occupons nous maintenant de déformation ; une structure complexe est définie par la relation :

$dx^\mu = J^\mu_\nu dx^\nu$  avec  $J^2 = -1$  soit :

$$J^\mu_\nu J^\nu_\zeta = -\delta^\mu_\zeta$$

On a en coordonnées complexes :

$$J^j_k = i\delta^j_k; \quad J^{\bar{j}}_{\bar{k}} = -i\delta^{\bar{j}}_{\bar{k}}; \quad J^j_{\bar{k}} = J^{\bar{j}}_k = 0;$$

considérons une déformation de la structure, alors :

$$J^\mu_\nu \rightarrow J^\mu_\nu + \tau^\mu_\nu. \text{ pour une petite valeur de } \tau^\mu_\nu.$$

$$J^2 = -1 \text{ donc } \tau^j_k = \tau^{\bar{j}}_{\bar{k}} = 0;$$

$$\text{Si on pose } \tau = \tau^j_k dz^k \frac{\partial}{\partial Z^j},$$

On peut montrer que :  $\tau \in H^1(\mathcal{T}_X)$ ; au premier ordre.

### 10.3 Un exemple : quintique de dimension 3

On considère la quintique suivante incluse dans  $\mathbf{P}^4 = W$  :

De la suite exacte courte d'adjonction vue précédemment et rappelée dans le cas particulier ci-dessous on déduit :

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{T}_{W|X} \rightarrow \mathcal{O}(5) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{T}_X) \rightarrow H^0(X, \mathcal{T}_{W|X}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}(5)) \rightarrow H^1(X, \mathcal{T}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{T}_{W|X}) \rightarrow$$

Et on a calculer plus haut :

$$H^0(X, \mathcal{T}_{W|X}) = \mathbf{C}^{24}$$

$$H^0(X, \mathcal{O}(5)) = \mathbf{C}^{125} \text{ or on avait aussi : } H^0(X, \mathcal{T}_X) = H^0(X, \Omega_X^2) = 0;$$

Comme  $H^1(X, \mathcal{T}_{W|X}) = 0$  a cause de la suite d'Euler

On peut extraire un bout de suite exacte encadré de zeros :

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{T}_{W|X}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}(5)) \rightarrow H^1(X, \mathcal{T}_X) \rightarrow 0$$

D'où la dimension de  $H^1(X, \mathcal{T}_X)$  qui donne le nombre de déformations de structures complexes :

$$\dim(H^1(X, \mathcal{T}_X)) = 101.$$

## 11 Espace de module des courbes, des courbes à points marqués

On note respectivement :  $\mathcal{M}_g, \mathcal{M}_{g,n}$  l'espace des modules de courbes (concrètement pour nous des surfaces de Riemann), et l'espaces des courbes à  $n$  points marqués, on verra par la suite que l'on s'intéressera plus souvent à l'espace des courbes stables sous ensemble de l'ensemble précédent.

La formule de Riemann-Roch donne :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} H^0(T\Sigma) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(T\Sigma) &= \int_{\Sigma} ch(T\Sigma) td(T\Sigma) \\ &= \int_{\Sigma} (1 + c_1(T\Sigma))(1 + \frac{1}{2}c_1(T\Sigma)) = \frac{3}{2} \int_{\Sigma} c_1(T\Sigma) = 3 - 3g \end{aligned}$$

Ce résultat est important pour la suite, la dernière égalité provient simplement de l'intégration de la classe d'Euler qui dans le cadre d'une surface de Riemann est la première classe de Chern ("top" classe) :

$$\int_{\Sigma} c_1(T\Sigma) = 2 - 2g$$

Cependant, à titre d'exercice de montrons cette égalité dans le cas particulier où  $\Sigma$  est une courbe de degré  $d$  de  $\mathbf{P}^2$  c'est à dire une surface de Riemann de genre  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

Rappelons la suite exacte duale de la suite exacte d'une hypersurface "formule d'adjonction"

$$0 \rightarrow TX \rightarrow T\mathbf{P}^n|_X \rightarrow \mathcal{O}(d)|_X \rightarrow 0$$

où  $X$  est une hypersurface de degré  $d$

$\mathcal{O}(d)|_X$  est juste le fibré normal  $N_X$ , en posant  $H^d = \mathcal{O}(d)$ , il vient :



$$ch(H^d) = 1 + c_1(H^d) + \dots = c(\mathcal{O}(d)) = 1 + d.x \text{ (fibré en droites)}$$

$$\text{On a : } c(\mathbf{P}^n) = (1 + x)^{n+1}$$

d'autre part,  $c(\mathbf{P}^n) = c(H^d).c(X)$  : propriété de multiplicité des classes de Chern.

On obtient alors la formule :

$$c(X) = \frac{(1+x)^{n+1}}{1+d.x}$$

Pour  $n = 2$  la linéarisation de la formule ci dessus donne :

$$c(X) = \frac{(1+x)^{2+1}}{1+d.x} = 1 + (3 - d)x = 1 + c_1(X)$$

$$\text{Par intégration dans la fibre : } \chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} c_1(\Sigma) = \int_{\mathbf{P}^2} c_1(\Sigma)(e(H^d))$$

$$\text{Ici } e(H^d) = e(\mathcal{O}(d)) = \text{"première classe de Chern"} = d.x$$

finalement

$$\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} c_1(\Sigma) = \int_{\mathbf{P}^2} d(3 - d)x^2 = d(3 - d) \text{ car :}$$

$$\int_{\mathbf{P}^2} x^2 = 1$$

On en deduit la formule à montrer en remplaçant  $g$  en fonction de  $d$ .

$H^0(T\Sigma)$  compte le nombre de champs de vecteurs ou le nombre de points marqués qu'il faut pour stabiliser la courbe ainsi :

$$\text{si } g \geq 2 : \dim(H^0(T\Sigma)) = 0 : \dim(H^1(T\Sigma)) = \dim(\mathcal{M}_g) = 3g - 3$$

$$\text{si } g = 1 : H^0(T\Sigma) = \mathbf{C} : \dim(H^1(T\Sigma)) = \dim(\mathcal{M}_g) = 1$$

$$\text{si } g = 0 : \dim(H^0(T\Sigma)) = 3 : H^1(T\Sigma) = \mathcal{M}_g \text{ est un point.}$$

## 12 Espace de module d'applications, des courbes à points marqués

Un espace important pour la symétrie miroir est l'espace des applications holomorphes,  $\phi : \Sigma \rightarrow M$

$M$  est une variété de Calabi-Yau. Si on considère une déformation holomorphe de  $\phi$  :

La formule de Riemann Roch s'écrit ici :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbf{C}} H^0(\phi^*TM) - \dim_{\mathbf{C}} H^1(\phi^*TM) &= \int_{\Sigma} ch(\phi^*TM)td(\Sigma) \\ &= \int_{\Sigma} (n + \phi^*c_1(TM))(1 + \frac{1}{2}c_1(\Sigma)) \\ &= \int_{\Sigma} \phi^*c_1(TM) + n \int_{\Sigma} (\frac{1}{2}c_1(\Sigma)) = n(1 - g) + \int_{\Sigma} \phi^*c_1(TM) \end{aligned}$$

Les deux formules de Riemann Roch vue ci-dessus sont les deux maillons qui vont s'insérer dans une théorie de la déformation des courbes et applications stables avec points marqués. Par ailleurs, quand on considère l'espace des modules avec  $n$  points marqués il faut simplement ajouter  $n$  à sa dimension ce que l'on avait omis de dire. Cela signifie rajouter  $n$  fois le corps  $\mathbf{C}$

## 13 Automorphismes, Déformations, Obstructions

D'abord et toujours, la suite exacte courte d'adjonction :

$$0 \rightarrow T_{\Sigma} \rightarrow f^*T_X \rightarrow N_{\Sigma/X} \rightarrow 0$$

Dans cette suite, le premier terme s'intéresse aux déformations de la surface de Riemann.

le second aux déformations de l'application  $f$  la surface de Riemann source étant fixée.

Le troisième aux déformations de l'application  $f$ .

Cette suite permet à la longue suite exacte ci-dessous d'exister :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & \rightarrow & H^0(\Sigma, T_\Sigma) & \rightarrow & \\
H^0(\Sigma, f^*TX) & \rightarrow & H^0(\Sigma, N_{\Sigma/X}) & \rightarrow & H^1(\Sigma, T_\Sigma) & \rightarrow & \\
H^1(\Sigma, f^*TX) & \rightarrow & H^1(\Sigma, N_{\Sigma/X}) & \rightarrow & 0 & & 
\end{array}$$

Interprétons les différents termes :

Le fibré  $T_\Sigma$  est relatif aux déformation de la surface de Riemann elle même :

$H^0(\Sigma, T_\Sigma)$  mesure les automorphismes infinitesimaux.

$H^1(\Sigma, T_\Sigma)$  mesure les déformations infinitesimales de  $\Sigma$ .

$H^2(\Sigma, T_\Sigma)$  Les obstructions aux déformations de  $\Sigma$  ici inexistantes.

Le fibré  $N_{\Sigma/X}$  est relatif aux déformations de l'application  $f$  :

Le fibré  $f^*TX$  est relatif aux déformations de l'application  $f$  la surface de Riemann étant fixée On peut alors donner un forme générique à la longue suite exacte ci-dessus :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & \rightarrow & \text{Aut}(\Sigma) & \rightarrow & \\
\text{Def}(f) & \rightarrow & \text{Def}(\Sigma, f) & \rightarrow & \text{Def}(\Sigma) & \rightarrow & \\
\text{Ob}(f) & \rightarrow & \text{Ob}(\Sigma, f) & \rightarrow & 0 & & 
\end{array}$$

Ou si les surfaces possèdent des points marqués :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & \text{Aut}(\Sigma, p_1, \dots, p_n, f) & \rightarrow & \text{Aut}(\Sigma, p_1, \dots, p_n) & \rightarrow & \\
& & \rightarrow & \text{Def}(\Sigma, p_1, \dots, p_n, f) & \rightarrow & \text{Def}(\Sigma, p_1, \dots, p_n) & \rightarrow \\
\text{Ob}(f) & \rightarrow & \text{Ob}(\Sigma, p_1, \dots, p_n, f) & \rightarrow & 0 & & 
\end{array}$$

Cette dernière suite exacte va nous donner la dimension d'un espace de module important l'espace  $\mathcal{M}_{g,n}(X, \beta)$ , qui regroupe les application stable à  $n$  points marqués vivant dans une classe de cohomologie donnée dont on parlera plus en détail et avec des exemples dans un prochain exposé.

Cependant nous ne pouvons nous empêcher de donner sa dimension, c'est une application de la suite exacte longue précédente :

Tout d'abord, on avait obtenu (deuxième formule de R.R) :

$$h^0(\Sigma, f^*T_X) - h^1(\Sigma, f^*T_X) = (\dim X)(1 - g) + \int_{\Sigma} f^*c_1(T_X)$$

ou :

$$h^0(\Sigma, f^*T_X) - h^1(\Sigma, f^*T_X) = (\dim X)(1 - g) + \int_{f_*(\Sigma)} c_1(T_X)$$

Et on posera  $\beta$  par abus de langage pour  $f_*(\Sigma)$   $\beta$  étant la classe de cohomologie dans laquelle vit l'application  $f$

d'autre part, la première formule de R.R obtenue donnait :

$$\dim(Def(\Sigma, p_1, \dots, p_n)) - \dim(Aut(\Sigma, p_1, \dots, p_n)) = 3g - 3 + n$$

Le complexe ci-dessus est encadré de 0; d'autre part, si les courbes sont stables, on a pas d'automorphismes infinitésimaux :  $Aut(\Sigma, p_1, \dots, p_n, f) = 0$   
L'addition alternée des dimensions des groupes de cohomologie donne la caractéristique d'Euler Poincaré du complexe est nulle :

$$Aut(\Sigma, p_1, \dots, p_n) - Def(f) + Def(\Sigma, p_1, \dots, p_n, f) - Def(\Sigma, p_1, \dots, p_n) + Ob(f) - Ob(\Sigma, p_1, \dots, p_n, f) = 0$$

dernières quantités donne la dimension de l'espace des modules :

$$\dim \mathcal{M}_{g,n}(X, \beta) =$$

$$\dim Def(\Sigma, p_1, \dots, p_n, f) - \dim Ob(\Sigma, p_1, \dots, p_n, f) = (\dim X)(1 - g) + \int_{f_*(\Sigma)} c_1(T_X) + 3g - 3 + n$$

Si la variété est de Calabi-Yau on se souvient que  $c_1(TM) = 0$ . Alors, le terme intégrale "degré de l'image s'annule" d'autre part, dans le cas  $n = 0, \dim X = 3, g = 0$  cette formule donne zero.

Cela explique que le travail du physicien sera un travail de comptage, de dénombrement d'instantons (i.e) de courbes holomorphes dont on a déjà parlé dans une classe de cohomologie donnée . Cela lui permettra de régler les fonctions de corrélations de notre univers...

## Références

- [1] M.Audin *Cohomologie quantique* Séminaire Bourbaki, n° 807, 1995.
- [2] M.Audin, J.W. Morgan, P. Vogel *Nouveaux invariants en géométrie et topologie*, Panoramas et synthèses Numéro 11, 2001 S.M.F
- [3] D.Bennequin *Monopôles de Seiberg-Witten et conjecture de Thom*, Séminaire Bourbaki, n° 807, 1995.
- [4] D.A. Cox, S. Katz, *Mirror symmetry and Algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs V68, A.M.S 1999.
- [5] S.Donaldson, P. Kronheimer, *The geometry of four manifolds*, Oxford University Press, 1990.
- [6] B.Dubrovin *Geometry of 2D Topological field théorie* Preprint SISSA-89/94/FM hep-th/9407018 , 1994
- [7] D.McDuff, D.Salamon, *Introduction to symplectic geometry* Oxford University Press, 1995.
- [8] D.McDuff, D.Salamon, *J-holomorphic Curves and Quantum Cohomology* , Univ. Lecture series 6, A.M.S., 1994.
- [9] P. Fre', P. Soriani *The N=2 Wonderland* World Scientific
- [10] W. Fulton, *Intersection theory*, Springer.
- [11] K. Gawedzki, *Lectures on Conformal field theory, in Quantum Fields and String : A Course for mathematicians, Vol 2* , A.M.S
- [12] P.Griffiths, J.Harris, *Principle of algebraic geometry*, Wiley-interscience, New York, 1978.
- [13] K.Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, E. Zaslow ,*Mirror Symmetry* Clay Mathematics Monographs, Vol 1 A.M.S, 2003
- [14] M. Kontsevich, Y.Manin, *Gromov-Witten Class, Quantum Cohomology, and enumerative Geometry*, Mirror symmetry II, A.M.S/IP Studies in advanced Math., Vol 1 A.M.S, 1997, pp. 607-653.
- [15] J.Le Potier, *fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Publication de l'Université Paris 7.
- [16] C. Voisin *Symétrie miroir*, Panoramas et synthèses Numéro 2, 1996 S.M.F