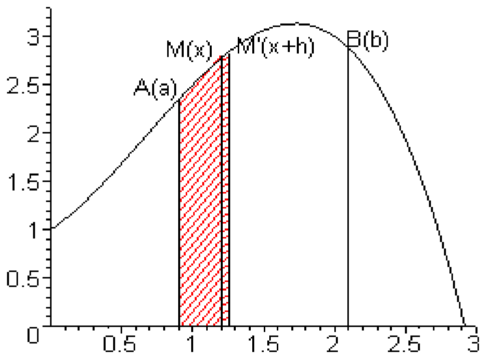
Intégration

I. Introduction

On a vu que si f est une fonction numérique définie et continue sur un intervalle I. elle admet une primitive notée F telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x élément de I.
Donnons une interprétation géométrique de cette notion.
Pour cela considérons I = [a,b] et supposons que f est une fonction strictement positive sur [a,b] dont le graphe est donné ci-dessous.



Soit M un point du graphe de f d'abscisse x.
Considérons l'aire comprise entre :

- l'axe des abscisses,
- la courbe
- les parallèles à l'axe des ordonnées passant par a et x

Cette aire dépend de l'abscisse x de M, c'est donc une fonction de x que nous noterons A(x)
Montrons que A(x) est une primitive de f(x), et pour cela calculons la dérivée de A(x). (en utilisant la définition)

Pour cela considérons le point M' d'abscisse x+h sur la courbe représentative de f. (sur le dessin h > 0).
Si on considère A(x+h) – A(x), il s'agit clairement de l'aire du trapèze mixtiligne comprise entre les parallèles à Oy en x et x+h, la courbe et l'axe des x .
Elle est comprise entre h.f(x) et h.f(x+h) dans notre cas (h>0, f positive et croissante sur [x,x+h]), on a donc $f(x) < \frac{A(x+h) - A(x)}{h} < f(x+h)$
Mais f est continue donc la limite de f(x+h) quand h tend vers zéro est f(x), et donc la limite de $\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$ quand h tend vers 0 est f(x), c'est-à-dire que la dérivée de A(x) en x est f(x).
On montre ainsi que A(x) est une primitive de f(x) : c'est en fait celle qui s'annule pour x=a.

Ainsi si F(x) est une primitive quelconque de f(x) , on a A(x)= F(x) - F(a).

Définition : On appelle **intégrale de f sur [a,b]** et on note $\int_a^b f(x)\,dx, = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$,

où F(x) est une primitive de f(x) sur [a,b].

Exemple : $\int (x^2 - x)\,d\,x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$; $\int_1^2 (x^2 - x)\,dx = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

II. Propriétés des intégrales :

Le calcul des intégrale se ramène donc au calcul des primitives. Pour simplifier les calculs on pourra utiliser les propriétés suivantes :

1. Linéarité : Soient f et g deux fonctions numériques continues sur [a,b], soient λ et μ deux réels
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx + \mu\int_a^b g(x)\,dx$$
2. Relation de Chasles : Soit f une fonction numériques continue sur [a,b] et c un point de [a,b]
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$
3. Positivité : Soit f une fonction continue et positive sur [a,b] ; alors
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

III. Calcul de l'aire d'une partie du plan

Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on appelle **unité d'aire** (notée u.a.) l'aire du rectangle construit sur les vecteurs du repère.
En utilisant la définition de l'intégrale on peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème :

Soit f une fonction continue et positive sur [a,b], dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'aire du domaine D défini par :

D = {(x,y) : a ≤ x ≤ b, 0≤ y ≤ f(x)} est égale à $\int_a^b f(t)dt$

Il s'agit **d'une aire algébrique** (c'est-à-dire que l'aire est positive si la fonction est positive sur [a,b] et est négative dans le cas contraire)
Pour s'en convaincre il suffit de calculer l'aire de rectangles définis par des fonctions constantes sur [a,b].

Pour f(x) = 2 sur [0,2] clairement $\int_0^2 2\,dt = [2t]_0^2 = 4 - 0 = 4$ alors que si f(x) = -2 sur [0,2] clairement $\int_0^2 -2\,dt = [-2t]_0^2 = -4 - 0 = -4$

Généralisation
Théorème : Soient f et g deux fonctions continues sur [a,b] telles que :
Pour tout x de [a,b], f(x) ≤ g(x) .
Dans un repère orthogonal, l'aire de la surface limitée par les représentations graphiques de f et g et les droites d'équations x = a et x = b est :
$$A = \int_a^b (g(t) - f(t))dt \text{ en unités d'aires}$$