Logarithmes et exponentielles

I. Introduction

On a vu que le calcul des primitives, peut se faire de façon simple en « lisant le tableau des dérivées à l'envers », mais il existe un type de formules pour lesquelles on ne sait pas calculer de primitives et qui sont néanmoins très simples les fonctions du type : $\frac{1}{x}$ ou $\frac{1}{x+1}$ …

II. Logarithmes et exponentielles

Les fonctions logarithmes apparaissent de manière naturelle dans la résolution du problème suivant :
Trouver toutes les fonctions dérivables f définies sur l'intervalle I =]0,+∞[telles que :

pour tout couple (x,y) de réels $f(xy) = f(x)+f(y)$ (1)

Cette relation permet de ramener le calcul d'un produit à celui d'une somme et celui d'un quotient à celui d'une différence. A l'origine cela permettait d'obtenir rapidement un résultat grâce à une règle à calcul ou une table des valeurs de f.

Supposons qu'une telle fonction f existe, elle aura alors les propriétés suivantes :

- ✓ En posant x = y = 1, on a f(1) = 2f(1) soit f(1) = 0
- ✓ En dérivant la relation (1) par rapport à y (en supposant x constant) $xf'(xy) = f'(y)$, en posant alors y = 1 on en déduit $f'(x) = \frac{f'(1)}{x} = \frac{k}{x}$ où k est une constante réelle. Si on avait k = 0, alors f '(x) serait nulle, donc f(x) serait constante sur I, ce qui ne convient pas, on suppose donc k non nul.
- ✓ On en déduit que f(x) serait une primitive de $\frac{k}{x}$, il faut qu'elle s'annule en x = 1, c'est donc la primitive de $\frac{k}{x}$ qui s'annule en x = 1.

Réciproquement supposons que f(x) soit la primitive de $\frac{k}{x}$ qui s'annule en x = 1, alors posons g(x) = f(xy) alors :

$g'(x) = f'(xy) = y\, f'(xy) = y\frac{k}{xy} = f'(x)$ donc g(x) = f(x) + C où C est une constante réelle mais pour x = 1 on a f(y) = C d'où f(xy) = f(x) + f(y).

Par ailleurs on remarque que $f'(x) = \frac{k}{x}$ avec x > 0 et k non nul, donc selon la valeur de k choisie, f sera soit strictement croissante soit strictement décroissante.
Dans les deux cas, elle admettra donc une fonction réciproque h(x) telle que $f \circ h(x) = x$ d'où :
$(f \circ h)'(x) = h'(x)\, f'(h(x)) = 1$ d'où $h'(x) = k\, h(x)$

Enfin on a h(x+y) = h(x) h(y), pour s'en convaincre, il suffit d'appliquer la fonction f aux deux membres de cette égalité, on aura bien f(h(x+y)) = f(h(x) h(y)) = f(h(x)) + f(h(y)) = x + y.

Toutes les fonctions du type de f sont **des fonctions logarithmes** (elles vérifient $f'(x) = \frac{k}{x}$).
Toutes les fonctions du type de h sont **des fonctions exponentielles** (elles vérifient h'(x) = kh(x)).

En particulier, lorsque k = 1, la fonction f est appelée **logarithme népérien** et est notée ln, la fonction g est appelée **exponentielle** et est notée exp.

III. Logarithme népérien

Le logarithme népérien est donc la primitive de $\frac{1}{x}$ qui s'annule en x = 1, elle est notée ln. Elle a pour domaine de définition I =]0,+∞[.
Elle vérifie évidemment la relation initiale,

pour tout (x, y) de réels ln(xy) = ln(x) + ln(y)

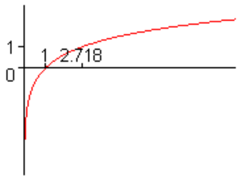
Si on rappelle que $x^0 = 1$ et $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, alors

pour tout x réel positif et tout n entier relatif $\ln(x^n) = n \ln(x)$

On en déduit

quels que soient x et y strictement positifs $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur son domaine.
Quand x tend plus l'infinie, ln(x) tend vers plus l'infini et quand x tend vers 0 à droite, ln(x) tend vers moins l'infini.
Il existe un nombre très important appelé **nombre d'Euler**, c'est l'antécédent de 1 par la fonction ln, on le note e : ln(e) = 1. Ce nombre est un irrationnel aussi important que π, on peut donner une approximation de ce nombre e ~ 2.718281…

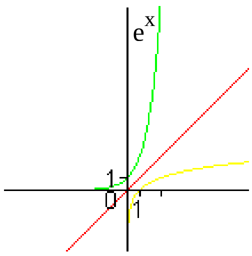


IV. Exponentielle

Le logarithme népérien étant une fonction qui à chaque élément de I =]0,+∞[associe exactement un élément de R, est une bijection de I vers R, elle admet donc une fonction réciproque.
Cette application réciproque est appelée **exponentielle** et sera notée **exp**.

On obtient donc de manière évidente :
- ✓ exp(ln(x)) = x pour tout x >0
- ✓ ln(exp(x)) = x pour tout x réel
- ✓ exp(0) = 1
- ✓ exp(1) = e
- ✓ $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

Comme on l'a vu dans l'introduction
- ✓ exp est sa propre dérivée.
- ✓ pour tout x et y réels exp(xy) = exp(x) + exp(y)
- ✓ pour tout x réel exp(-x) = 1/exp(x)
- ✓ pour tout x et y réel exp(x-y) = exp(x) / exp(y)
- ✓ pour tout x réel et tout n entier relatif $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$



Proposition :
On peut écrire $\exp(x) = e^x$ où e est le nombre d'Euler

En effet si a est un nombre strictement positif, et si on utilise le dernier résultat :

$$\exp(n \ln a) = \exp(\ln(a))^n = a^n$$

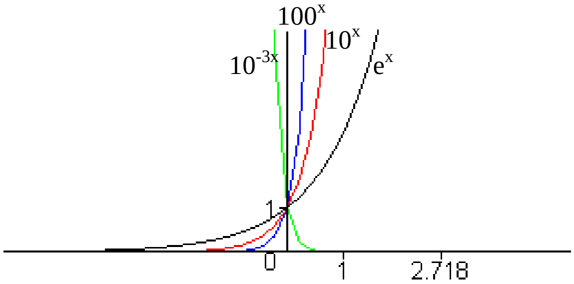
On remarque alors que l'on a une nouvelle définition de la puissance entière d'un réel strictement positif a, mais cela n'est pas le seul résultat.

En effet on n'a aucune contrainte sur la nature de n, on peut donc définir :

pour tout x réel et tout réel a >0 : $\exp(x\ln(a)) = a^x$.

En particulier pour tout x réel $\exp(x) = \exp(x\ln(e)) = e^x$

La fonction a^x est appelée **exponentielle en base a de x**.



De même si on prend le logarithme des deux membres de cette égalité (il s'agit de deux nombres strictement positifs) on a :
$\ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = \ln(e^x)\ln(a) = x \ln(a)$ ce qui généralise la relation connue sur le logarithme népérien.

V. Logarithmes et exponentielles en base a (a réel strictement positif)

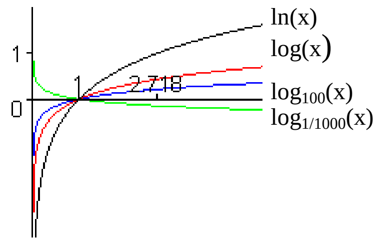
Pour a un réel positif strictement positif et tout x réel, on a donc $a^x = e^{x \ln a}$.
Cette fonction est elle aussi une bijection (il s'agit d'une exponentielle multipliée par une constante réelle non nulle), on peut donc chercher l'antécédent de tout y > 0 tel que $y = a^x$. Pour cela on écrit :

$$y = a^x \Leftrightarrow y = e^{x \ln a} \Leftrightarrow \ln(y) = x \ln(a) \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a}$$

On dit que x est **le logarithme en base a** de y, on note $x = \log_a(y)$.

Cette fonction est une des fonctions recherchées dans notre introduction, elle correspond à la primitive des fonctions du type $\frac{k}{x}$ où $k = \frac{1}{\ln a}$.

On remarque que le logarithme népérien apparaît comme le logarithme de base e.



En physique et en biologie, on utilise essentiellement le logarithme en base 10, appelé **logarithme décimal et noté $\log_{10}$** ou plus simplement log.

Exemples : le pH, les dB, les échelles logarithmiques…

VI. Croissances comparées

Grâce aux fonctions exponentielles de base a, on va donc pouvoir définir des fonctions puissances du type :

$$f(x) = x^s = e^{s \ln(x)}$$ pour tout x réel strictement positif et tout s réel.

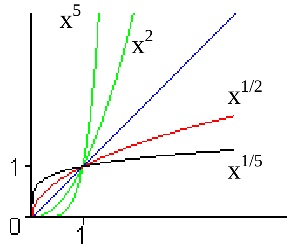
Il s'agit d'une généralisation de la fonction puissance entière.

Clairement cette fonction est dérivable (à l'infini) et $f'(x) = \frac{s}{x} e^{s \ln(x)} = s\, x^{s-1}$.

On reconnaît ici à nouveau la généralisation de la dérivation des fonctions puissances entières.
Le sens de variation de x^s dépend donc uniquement du signe de s :

- ✓ Si s > 0 la fonction x^s est strictement croissante
- ✓ Si s < 0 la fonction x^s est strictement décroissante.

Les limites et le sens de variation de ces fonctions est donc immédiat et on en déduit facilement les graphes suivants.



Il reste à énoncer le théorème suivant, qui permet de comparer le comportement de ces fonctions en plus ou moins l’infini.

Théorème :
Supposons que a >1, b <1 et s >0 alors :

- ✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^s} = +\infty$
- ✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^x}{\ln(x)} = +\infty$
- ✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^s\, b^x = 0$
- ✓ $\lim\limits_{x \to 0^+} x^s \ln(x) = 0$