Autour de la dérivation

I. Différentielle

La notion de fonction différentiable est très proche de celle de notion dérivable ; elle présente sur la précédente l'avantage de se généraliser au cas des fonctions de plusieurs variables.

Rappelons que si x_0 est un point du domaine de définition de f, on dit que f est dérivable en x_0, si et seulement la limite du taux de variation de f entre x et x_0 existe, et est un nombre fini.

On a alors :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Sur le graphe de la fonction f, cela signifie que la corde passant par les points $(x,f(x))$ et $(x_0,f(x_0))$ a une position limite, ou autrement dit que si l'on considère des valeurs très proches de x_0 la courbe représentative de f est presque confondue avec une droite qui est la tangente au graphe au point $(x_0,f(x_0))$.

On peut alors écrire que $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\ f'(x_0) + (x - x_0)\ \varepsilon(x - x_0)$ où $\varepsilon(x - x_0)$ tend vers 0 dans x tend vers x_0, ou encore $\Delta f \sim f'(x_0)\ \Delta x$ où Δx représente une petite variation des abscisses x et Δf représente la variation correspondante des ordonnées. On note aussi $\Delta y \sim f'(x_0)\ \Delta x$

Cette notation signifie que si x et y sont liés par une fonction f, à une erreur Δx sur la variable x correspond une erreur $\Delta y \sim f'(x_0)\ \Delta x$ sur la variable y.

Ainsi au voisinage de x_0, la fonction f est presque confondue avec la fonction :

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\ f'(x_0)$$

qui n'est autre qu'une fonction linéaire par rapport aux variables $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$ si on pose $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$, celle dont le graphe est la tangente à la courbe en $(x_0,f(x_0))$.

Cette fonction est appelée différentielle de f au point x_0 et on peut la noter (par rapport aux variables dx et df) $df = f'(x_0)\ dx$.

La notation différentielle a un comportement très simple vis à vis des opérations élémentaires sur les fonctions.
On se rappelle que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, ainsi si f et g sont deux fonctions dérivables en x_0 : $d(f+g) = (f'(x_0) + g'(x_0))\ dx = f'(x_0)\ dx + g'(x_0)\ dx = df + dg$ d'où :

$$d(f+g) = df + dg$$

De même la dérivée du produit de fg est donnée par $f'g + fg'$, d'où

$d(fg) = (f\,'(x_0)\ g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))\ \ dx = g(x_0)\ f\,'(x_0)\ \ dx + f(x_0)\ g'(x_0)\ dx = g(x_0)df + f(x_0)dg$

$$d(fg) = f\ dg + g\ df$$

On en déduit également la différentielle du quotient des deux fonctions f et g (quand elle existe) :

$$d(f/g) = \frac{g\ df - f\ dg}{g^2}$$

L'application identique est différentiable en tout point x_0 de R et cette application est la fonction identique

Notation différentielle de la dérivée :
La relation $df = f\,'(x_0)\ dx$ donnant la différentielle de x en x_0 peut s'écrire :
$f\,'(x_0) = \frac{df}{dx}$ en précisant que ce calcul se fait en x_0
Cette notation est en particulier très utile lorsqu'on cherche la dérivée d'une composée :
Si on veut calculer la différentielle de $f = u°v$ mais $f(x) = u(v(x))$, d'où

$$df = \frac{du}{dv}\ \frac{dv}{dx}$$

II. Primitives

Si f et F sont deux fonctions définies sur un intervalle I, on dit que **F est une primitive** de f, si et seulement F' = f sur I.

Par lecture inverse du tableau sur les dérivées usuelles et de celui des opérations élémentaires sur les fonctions dérivables, on obtient facilement des primitives classiques.

Théorème (admis)
Si f est une fonction continue sur I, elle admet des primitives sur I

Remarque : la réciproque de ce théorème est fausse, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions discontinues sur I qui admettent des primitives.

Proposition
Si f est une fonction continue sur I, qui admet F comme primitive sur I alors :
- ✓ Toutes les primitives de f sont de la forme F(x) + k où k est un réel
- ✓ Pour tout couple (x_0,y_0) de R^2 il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

<u>Démonstration :</u>
Si F et G sont deux primitives de f sur I (un intervalle) , alors F' = G' = f, c'est-à-dire (F-G)'= 0, c'est-à-dire F – G = k sur I.
Toutes les courbes représentatives des primitives de f se déduisent l'une de l'autre par une translation de vecteur k, une seule de ces courbes passe par le point (x_0,y_0)

Notation différentielle

Si F est une primitive de f sur I, on a F'(x) = f(x) ce qui peut s'écrire $\frac{dF}{dx} = f$, ce qu'on peut aussi écrire $F(x) = \int f(x)\,dx$

Méthode directe de calcul des primitives :

Pour déterminer les primitives de f sur I :

- ✓ On vérifie que f est continue de sorte que f admette une primitive
- ✓ On utilise le tableau des dérivées usuelles et les règles des opérations élémentaires sur les dérivées
- ✓ On ajoute une constante arbitraire

Méthode d'intégration par parties :

On sait que si u et v sont deux fonctions dérivables sur I :

$$(uv)' = u'v + uv', \text{ on a donc } u'v = (uv)' - uv'$$

mais clairement une primitive (uv)' est uv, on en déduit que :

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$$

Cette formule peut parfois permettre de résoudre des calculs de primitives que l'on n'aurait pas pu faire autrement.