Etude des fonctions usuelles

1. Introduction

Soit f une fonction réelle de la variable réelle, on a vu que ces fonctions sont souvent définies par des formules, c'est-à-dire définies par des expressions mettant en jeu des opérations élémentaires et des fonctions dites de référence.
Le but de ce chapitre est de passer en revue les propriétés fondamentales de ces fonctions de référence.

2. Les fonctions du premier degré

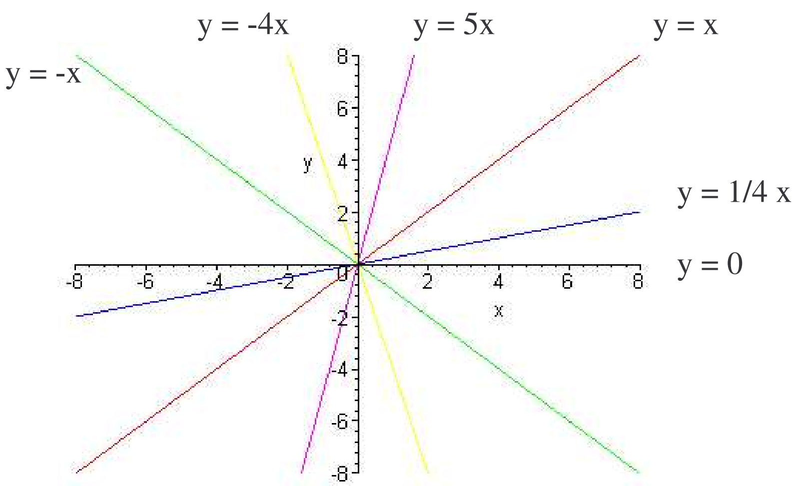
a) Les fonctions linéaires : f(x) = ax où a est un réel

Dans les mathématiques élémentaires, les **fonctions linéaires** sont les fonctions les plus simples que l'on rencontre Elles traduisent la proportionnalité.

Le réel *a* s'appelle **le coefficient de proportionnalité**.

Les fonctions linéaires se représentent dans le plan par une droite qui passe par l'origine du repère et dont le **coefficient directeur** (ou **pente**) de la droite est « a ».

Exemples :



Ces représentations permettent de façon immédiate de déterminer les variations des fonctions linéaires :

- Si a > 0 la fonction est strictement croissante.
- Si a = 0 la fonction est constante
- Si a < 0 la fonction est strictement décroissante.

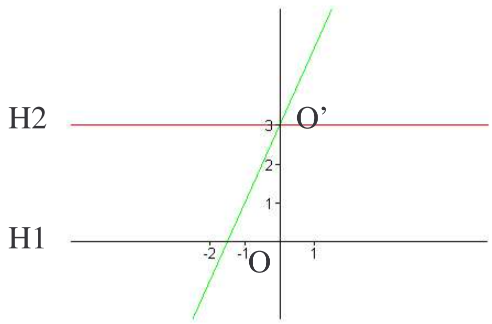
b) Les fonctions affines : f(x) = ax + b où a et b sont réels

Une fonction affine est caractérisée par le fait que ses accroissements sont linéaires.
En effet, si x_1 et x_2 sont deux réels, l'accroissement $f(x_1) - f(x_2)$ est proportionnel à $x_1 - x_2$:

$$f(x_1) - f(x_2) = a\,(x_1 - x_2)$$

Sa représentation graphique est elle aussi une droite de pente a, mais qui passe par (0,b) au lieu de passer par (0 ,0)
En fait on peut déduire la représentation graphique de f(x) = ax + b de celle de g(x) = ax, en faisant un changement de repère dans le lequel, les abscisses ne sont pas modifiées, et les ordonnées sont « décalées » de b.

Exemple : Si (x,y) sont les coordonnées dans le premier repère, et (X,Y) les coordonnées dans le deuxième repère.

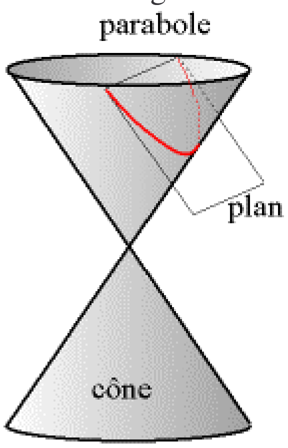


Si on est dans le repère (O, H1, V1) la droite représentée est celle d'équation $y = 2x + 3$,
Si on est dans le repère (O', H2, V1) la droite représentée est celle d'équation $Y = 2X$
Le changement de repère est : $X = x$ et $Y = y - 3$

3. Les fonctions du second degré.

Ces fonctions sont des polynômes, elles ont donc toutes les bonnes propriétés que l'on souhaite (continuité, dérivabilité). Leur représentation graphique est une parabole.

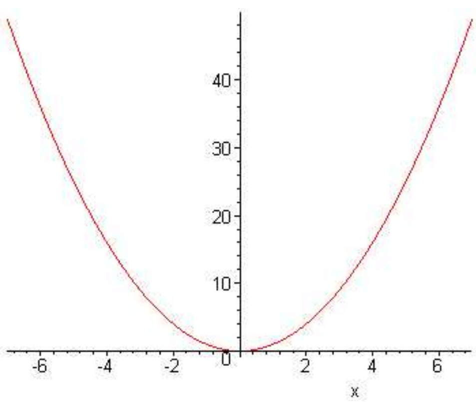
Les paraboles font partie de la famille des coniques, c'est-à-dire des courbes qui s'obtiennent par l'intersection d'un cône de révolution avec un plan ; en l'occurrence, la parabole est obtenue lorsque le plan est parallèle à l'une des génératrices du cône.



La parabole est l'intersection d'un plan avec un cône lorsque le plan est parallèle à une des génératrices du cône

a) La fonction carré $y = x^2$

Cette fonction est évidemment définie sur R en entier, les images par cette fonction sont toujours positives, elle s'annule uniquement en (0,0), elle est évidemment paire, son axe de symétrique est l 'axe des ordonnées et son graphe est une parabole de sommet l'origine.

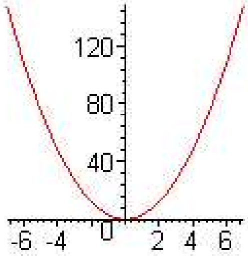


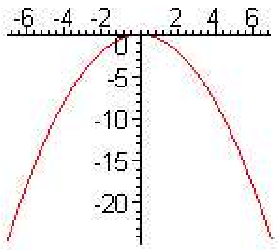
b) Les fonctions du type ax^2 avec $a \neq 0$

Ces fonctions sont des multiples des précédentes, elles admettent donc elles aussi pour graphe une parabole qui admet pour axe de symétrie l'axe des ordonnées et pour sommet l'origine du repère, mais qui sera « déformée » selon la valeur du coefficient multiplicateur a.
En particulier selon le signe de a :

- Si a >0 les images seront toutes positives et la parabole sera ouverte vers le haut, on dit que sa concavité est tournée vers les y positifs.
- Si a <0 les images seront toutes négatives et la parabole sera ouverte vers le bas, , on dit que sa concavité est tournée vers les y négatifs.

$f(x) = 3x^2$





$g(x) = -1/2\ x^2$

c) Les fonctions du second degré du type $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

Si on utilise la forme canonique de ces fonctions, elles sont toutes du type $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

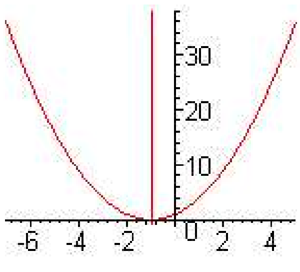
où Δ est le discriminant du trinôme.

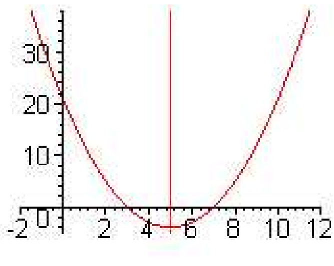
Si on fait un changement de repère en posant $X = x + \frac{b}{2a}$ et $Y = y + \frac{\Delta}{4a}$, on obtient $Y = aX^2$.

Le graphe de ces fonctions est donc à nouveau une parabole :

- pour connaître son orientation : on considère le signe « a »
- son axe de symétrie est donné par le changement de repère (dans le nouveau repère ce serait X = 0), c'est-à-dire que l'axe de symétrie est donné par $x = -\frac{b}{2a}$
- son sommet est donc en $S = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- les éventuelles intersections avec l'axe des abscisses sont données par la résolution du trinôme $ax^2 + bx + c = 0$

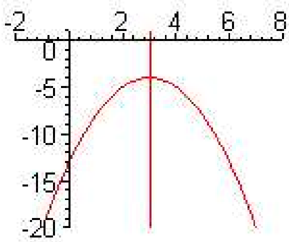
$x^2 + 2x + 1$

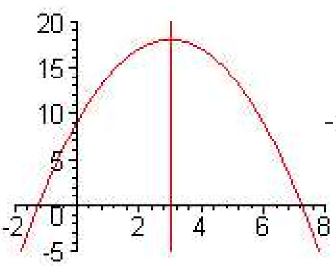




$x^2 - 10x + 21$

$-x^2 + 6x - 13$



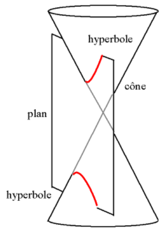


$-x^2 + 6x + 9$

4. Les fonctions homographiques $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ où a,b, c et d sont des réels.

On appelle **fonction homographique** toute fonction dont la formule peut s'écrire $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ où a,b, c et d sont des réels. Ces fonctions ne sont pas définies pour $x = -\dfrac{d}{c}$, elles sont donc discontinues et non dérivables en ce point.

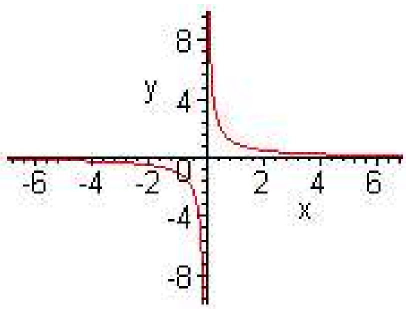
Leur représentation graphique est une **hyperbole** : c'est une conique obtenue en prenant l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan interceptant les deux branches du cône. Bien que l'illustration ci-dessous montre un plan vertical, tout angle plus faible que celui des génératrices du cône est acceptable.



a) La fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur R*.

L'étude de cette fonction est bien connue, on sait que la fonction est impaire (son graphe est symétrique par rapport à l'origine), qu'elle est continue sauf en 0, qu'elle est dérivable (sauf en 0) de dérivée $-\dfrac{1}{x^2}$, qu'elle est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$

Son graphe est donné par :



b) La fonction $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ où a,b, c et d sont des réels

Si a et c sont non nuls, on peut écrire

$$f(x) = \frac{a}{c}\,\frac{x + \frac{b}{a}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c}\,\frac{x + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c}\left(1 + \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}$$

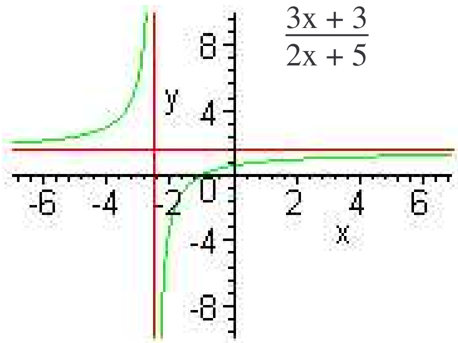
c'est-à-dire en posant $A = \dfrac{bc - ad}{c^2}$: $f(x) = \dfrac{a}{c} + \dfrac{A}{x + \frac{d}{c}}$

En faisant le changement de repère $X = x + \dfrac{d}{c}$ et $Y = y - \dfrac{a}{c}$, on se ramène donc à une équation du type $Y = \dfrac{A}{X}$ dont le graphe se déduit immédiatement de celui de $\dfrac{1}{x}$

Pratiquement, il suffit donc de se rappeler que :

- les asymptotes sont données par $x = -\dfrac{d}{c}$, et $y = \dfrac{a}{c}$

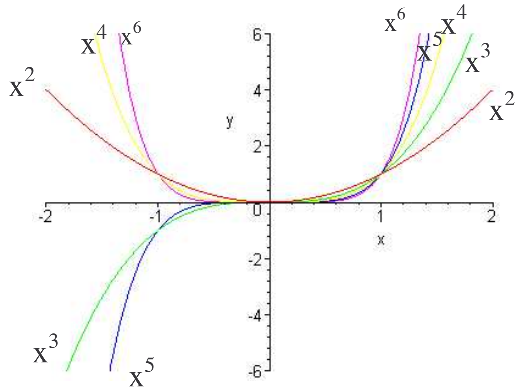
- le centre de symétrie est le point d'intersection des asymptotes c'est-à-dire $M(-\frac{d}{c};\frac{a}{c})$



5. Les fonction x^n et $\sqrt[n]{x}$, pour $n \in N$

a) Les fonctions x^n, pour $n \in N$

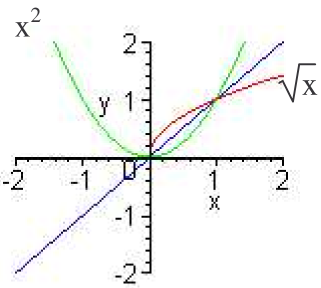
Elles sont définies sur R, elles sont paires si n est pair et impaires si n est impaire.
Elles sont continues et dérivables sur R, elles sont toutes croissantes sur R^+, celles qui ont un exposant pair présentent un extremum en l'origine, celles qui ont un exposant impair y présente un point d'inflexion (la courbe traverse sa tangente

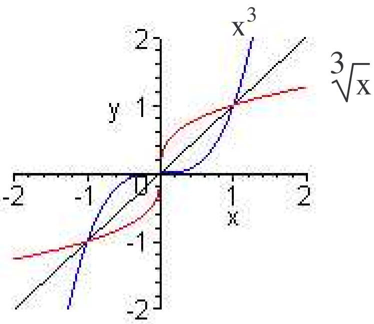


b) Les fonctions $\sqrt[n]{x}$, pour $n \in N$

Ce sont les fonctions réciproques des précédentes, lorsqu'on peut les définir. Pour cela il faut que la fonction x^n, pour $n \in N$ soit une bijection (c'est-à-dire que chaque point de l'ensemble d'arrivée de x^n, possède exactement un (et un seul) antécédent par x^n).

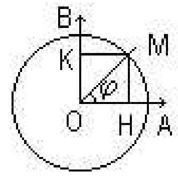
En étudiant les graphes précédents on se convainc facilement que les $g(x) = \sqrt[n]{x}$ sont définies de R^+ vers R^+ pour les n pairs, et de R vers R pour les n impairs.
On retiendra en particulier que les graphes de ces fonctions sont obtenus en « inversant » le rôle de l'abscisse et de l'ordonnée c'est-à-dire en faisant une symétrie par rapport à la $1^{ère}$ bissectrice, on a donc en particulier :





6. Les fonctions trigonométriques

Tout d'abord rappelons leurs définitions, soit AOM un angle de mesure φ représenté dans le cercle trigonométrique, alors :
le **cosinus** de l'angle est l'abscisse de M dans le repère (OA,OB)
le **sinus** de l'angle est l'ordonnée de M dans le repère (OA,OB)



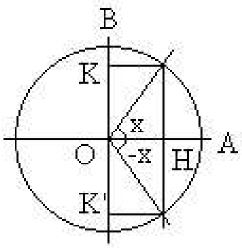
$\overline{OH} = \cos\varphi \quad \overline{OK} = \sin\varphi$

On peut alors définir les deux fonctions réelles de la variable réelle x : sin et cos, associant à tout réel x le cosinus et le sinus de l'angle de mesure x.
On appelle fonction **tangente** la fonction qui à tout nombre réel x associe le nombre

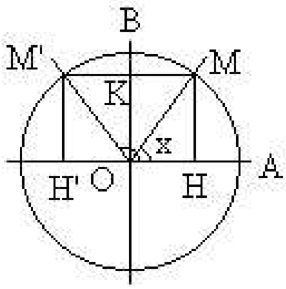
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ il faut pour cela que } \cos x \neq 0 \text{ c'est-à-dire } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

où k est un entier relatif.
Il faut bien sûr prendre en compte un grand nombre des formules de trigonométrie usuelles, mais les plus importantes peuvent être résumées ici :

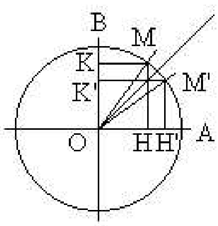
- pour tout x réel : $\cos x \in [-1,1]$ et $\sin x \in [-1,1]$
- pour tout x réel et tout k entier relatif $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
- pour tout x réel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$



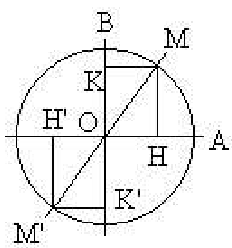
cos(-x) = cos(x)
sin(-x) = - sin(x)
tan(-x) = -tan(x)



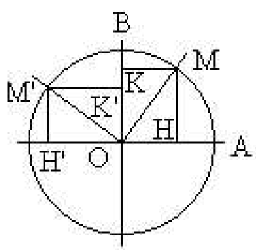
cos(π -x) = - cos(x)
sin(π -x) = sin(x)
tan(π -x) = - tan(x)



cos(π/2-x) = sin(x)
sin(π/2-x) = cos(x)
tan(π/2-x) = 1/tan(x)



cos(π + x) = -cos(x)
sin(π + x) = -sin (x)
tan(π + x) = tan(x)



cos(π/2 + x) = sin(x)
sin(π/2 + x) = - cos(x)
tan(π/2 + x) = -1/tan(x)

Valeurs remarquables

Pour x=0, on a ce qu'on appelle un angle plat, et de façon évidente :

$$\cos 0 = 1 \quad \sin 0 = 0 \quad \tan 0 = 0 \quad \text{cotan } 0 \text{ n'existe pas}$$

Pour x=π/2 on a un angle dit droit, et de même :

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad \tan\frac{\pi}{2} \text{ n'existe pas} \quad \text{cotan}\frac{\pi}{2} = 0$$

Pour x= π/6 : si on construit le triangle OMM' tel que l'angle AOM soit de mesure π/6 , alors le triangle OMM' est équilatéral. On en déduit que AM = ½ et donc par utilisation du théorème de Pythagore :

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{cotan}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

Pour x= π/3, en utilisant les relations fondamentales et le résultat précédent :

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \text{cotan}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Pour x= π/4, cette fois c'est le triangle AOM qui est isocèle, on en déduit que 0H=OM et par la relation fondamentale sur les fonctions trigonométrique.

$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$$

Etude des fonctions

a) Domaines de définition

Comme on l'a vu lors de leur définition : les fonctions sinus et cosinus sont définies sur R en entier, la fonction tangente est définie pour x différent de $\frac{\pi}{2}$ + k π,

b) Parité Périodicité Domaines d'étude

La fonction sinus est paire, par contre toutes les autres sont impaires (cf. les propriétés fondamentales des fonctions)

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2 π, alors que les fonctions tangente et cotangente sont périodiques de période π.

c) Continuité

Continuité en 0 de la fonction sinus:

Si x est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ clairement (par définition su sinus) 0 <sin x <x , par le théorème du gendarme sin x tend vers 0 pour x tend vers 0 par valeurs positives.

Comme sin(-x) = - sin x on en déduit que sin x tend vers 0 quand x tend vers 0

Continuité sur R de la fonction sinus

Pour que sinus soit continue il faut que pour tout x réel: sin(x+h) tende vers sin x quand h tend vers 0. Or Δ = sin(x+h) – sin x = 2 cos(x + h/2) sin h/2 d'où |Δ|<2 |sin h/2 |

Or si h tend vers 0 alors sin h tend vers 0, donc

Δ tend vers 0 quand h tend vers 0 et la fonction sinus est continue sur R

Continuité de la fonction cosinus

Mais pour tout x réel cos x = sin ($\frac{\pi}{2}$ -x), la fonction sinus et la fonction $\frac{\pi}{2}$ - x sont continues, donc la fonction cosinus est continue pour tout x réel

De même la fonctions tangente et est continue sur leur domaine de définition comme quotient de fonctions continues.

d) Dérivabilité

Limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0

Par définition de sin x, on peut facilement se convaincre que si x est petit sin x et x sont équivalents, donc :

$$\frac{\sin x}{x} \text{ tend vers 1 quand x tend vers 0}$$

Dérivabilité de sinus pour x réel

Pour étudier la dérivabilité de sin en x il faut étudier la limite quand h tend vers 0 de :

$$\Delta = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

or $\Delta = \frac{2}{h}\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}$, mais si h tend vers 0 alors $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tend vers 1, donc :Δ tend vers cos x

et sin x est dérivable de dérivée cos x pour tout x réel

Dérivabilité de cosinus pour x réel

Pour étudier la dérivabilité de cosinus on peut écrire cos x = sin ($\frac{\pi}{2}$ - x), on en déduit par la composition de fonctions dérivables que : cosinus est dérivable pour tout x réel et de dérivée – sinx

Dérivabilité de tangente pour x réel différent de $\frac{\pi}{2}+k\pi$

La fonction tangente est un quotient de fonctions dérivables, on en déduit tangente est dérivable sur son domaine de définition et

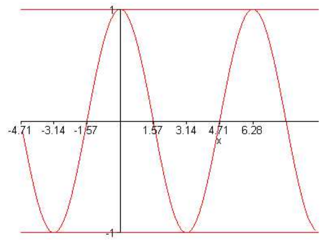
$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

e) Etude de la fonction cosinus

La fonction cosinus étant périodique de période 2π et paire, on étudie la fonction sur [0 , π]. Elle y est dérivable. Sa dérivée sin x est négative sur cet intervalle on a donc le tableau de variations suivant :

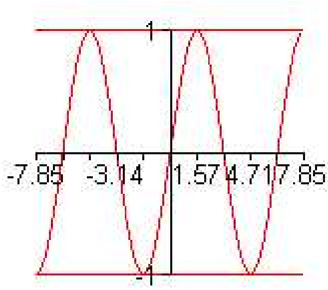
x	0	π/2	π
-sin x	0	-1	0
cos x	1 ↘	0 ↘	-1

En utilisant les symétries dues à la parité, puis la périodicité, on obtient le graphe :



f) Etude de la fonction sinus

On peut étudier la fonction sinus, comme on a étudié la fonction cosinus, mais on peut aussi remarquer que sin x $= \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$. Il suffit donc pour obtenir le graphe (et les variations) de la fonction sinus de faire une translation de $\frac{\pi}{2}$ vers la droite.



g) Etude de la fonction tangente

On a vu que la fonction tangente n'est pas définie en $\frac{\pi}{2} + k\,\pi$,de plus elle est périodique de période π, et elle est impaire. On va donc se placer sur un intervalle d'étude $[0\,,\frac{\pi}{2}[$.

Sur cet intervalle la dérivée de la fonction tangente étant $1 + \tan^2 x$, elle est toujours positive, donc la fonction est croissante.

De plus de façon évidente la fonction tend vers plus l'infini quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, on en déduit donc immédiatement le tableau de variations suivant:

x	0	$\pi/2$
$1 + \tan^2 x$	+	
tan x	0 ↗	$+\infty$

puis en utilisant les symétries dues à la parité, puis la périodicité.