Fonction numérique de la variable réelle

1. Introduction

Soient E et F deux ensembles on appelle fonction tout processus, noté en général (f, g, h…) qui permet d'associer à un élément x (appelé antécédent) de E au plus un élément y (appelé image de x et noté en général f(x) on lit « f de x ») de F.

Il y a évidemment plusieurs façons de définir le processus f :
de manière implicite :

- par une propriété caractéristique
- par une situation réelle ou expérimentale (tableau de valeurs, graphe)

de manière explicite, c'est-à- dire en donnant le moyen de calculer f(x) lorsque l'on connaît x :

- par une expression algébrique (une formule)
- par une description de calculs plus ou moins compliqués (un algorithme), où peut notamment intervenir une disjonction de cas (le procédé de calcul n'étant pas le même suivant les valeurs de la variable)
- par une construction géométrique

Si on parle de fonctions numériques de la variable réelle les deux ensembles E et F dont des parties de R.

2. Domaine de définition

La première chose est de déterminer l'ensemble sur lequel la fonction est définie, c'est-à-dire l'ensemble de tous les x réels pour lesquels on peut calculer f(x).
On appellera cet ensemble ***l'ensemble de définition*** de la fonction et on le notera D_f

On ne peut alors obtenir l'image de x que si x est un élément du domaine de définition.
De même si on cherche un antécédent pour y, on prendra garde que l'antécédent x trouvé soit bien un élément du domaine de définition.

3. Domaine d'étude

On peut parfois réduire ce domaine à un ensemble appelé ***domaine d'étude*** de la fonction, noté D dans ce cours, et en déduire par la suite le comportement de f sur D_f

- ***Parité :*** Tout d'abord on se demande si pour tout x élément du domaine de définition de f, -x est aussi élément de ce domaine (on dit que ***le domaine est symétrique*** par rapport à l'origine), puis on calcule f(-x).

  - si pour tout x, f(-x) = f(x) : on dit que la fonction est ***paire***.
    On étudie alors f sur la partie positive (resp. négative) du domaine de définition.
    On déduit l'autre partie du graphe de f par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

  - si pour tout x, f(-x) = -f(x) on dit que la fonction est ***impaire***.
    On étudie alors f sur la partie positive (resp. négative) du domaine de définition.
    On déduit l'autre partie du graphe de f par symétrie par rapport à l'origine.

- ***Périodicité :*** on est face à une fonction périodique si les images de la fonction se répètent de façon régulière selon un schéma défini sur un intervalle d'amplitude T donné. T est appelé la période de la fonction.
  On doit donc vérifier que pour tout x du domaine x + T appartient au domaine, puis que f(x+T) = f(x).

- Si on a une fonction définie par une courbe, on peut s'apercevoir que la courbe présente des éléments de symétrie : (soit un axe, soit un centre de symétrie).
  Pour simplifier le problème on peut alors prouver, faire un changement de repère, le centre du nouveau repère étant le centre de symétrie, ou un point de l'axe de symétrie. On se ramène alors à l'étude d'une fonction paire ou impaire.

4. Valeurs particulières - Limites

On détermine ensuite les valeurs de f(x) en certains points particuliers :et les limites de la fonction aux extrémités des intervalles contenus dans l'ensemble d'étude de la fonction.

Le calcul des limites répond à quelques règles de calcul assez simples que l'on trouvera résumé dans le tableau suivant qui doit se lire avec les conventions suivantes :

- ω est l'une quelconque des limites possibles ($\ell \in$ R*, 0^+, 0^-, $+\infty$, $-\infty$)
- 0^+ signifie un réel de valeur absolue infiniment petite et positif,
- 0^- signifie un réel de valeur absolue infiniment petite et négatif,
- sign(λ) signifie signe de λ
- F.I. signifie forme indéterminée.

$\lim\limits_{x \to \omega} f(x)$	$\lim\limits_{x \to \omega} g(x)$	$\lim\limits_{x \to \omega} \lambda f(x)$	$\lim\limits_{x \to \omega} (f+g)(x)$	$\lim\limits_{x \to \omega} (f-g)(x)$	$\lim\limits_{x \to \omega} (f.g)(x)$	$\lim\limits_{x \to \omega} \frac{f}{g}(x)$
$\ell \in$ R*	$\ell' \in$ R*	$\lambda\ell$	$\ell + \ell'$	$\ell - \ell'$	$\ell . \ell'$	$\frac{\ell}{\ell'}$
	0^+	$\lambda\ell$	ℓ	ℓ	$0^{sign(\ell)}$	sign(ℓ) ∞
	0^-	$\lambda\ell$	ℓ	ℓ	$0^{-sign(\ell)}$	- sign(ℓ) ∞
	$+\infty$	$\lambda\ell$	$+\infty$	$-\infty$	sign(ℓ) ∞	$0^{sign(\ell)}$
	$-\infty$	$\lambda\ell$	$-\infty$	$+\infty$	- sign(ℓ) ∞	$0^{-sign(\ell)}$
0^+	0^+	$0^{sign(\lambda)}$	0^+	0	0^+	F.I.
	0^-	$0^{sign(\lambda)}$	0	0	0^-	F.I.
	$+\infty$	$0^{sign(\lambda)}$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	0^+
	$-\infty$	$0^{sign(\lambda)}$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	0^-
0^-	0^-	$0^{-sign(\lambda)}$	0^-	0	0^+	F.I.
	$+\infty$	$0^{-sign(\lambda)}$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	0^-
	$-\infty$	$0^{-sign(\lambda)}$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	0^+
$+\infty$	$+\infty$	Sign(λ) ∞	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	F.I.
	$-\infty$	Sign(λ) ∞	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	- sign(λ) ∞	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	F.I.

Comment « lever les indéterminations »

- Indétermination du type « 0/0 » :

On essaie de simplifier la formule par (x - ω), soit en factorisant (numérateur et dénominateur), soit en rationalisant (on supprime la racines carrée en multipliant par la quantité conjuguée) soit en utilisant la règle dite de l'Hôpital :

Théorème : Soient *f* et *g* deux fonctions définies et continues sur]a, b] et différentiables sur]a, b[. On suppose que f(b)=g(b)=0 et que pour tout *x* de]a, b[, g'(x) ≠ 0. Alors sous réserve d'existence de la seconde limite :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Indétermination du type « ∞/∞ » :
  Par des factorisations et des simplifications il faut faire apparaître un terme dominant soit au numérateur soit au dénominateur. Il s'agira en général dans ce cours de fractions rationnelles dans lesquelles on dira que la limite en l'infini est la limite du rapport des termes de plus haut degré.
- Indétermination du type « $\infty - \infty$ » :
  En général on essaie une mise au même dénominateur puis, on utilise un habile « mélange » des méthodes précédentes afin de se ramener à un cas connu.

Les autres indéterminations se ramènent aux trois précédentes si on admet qu'une indétermination du type « $0 . \infty$ » est une indétermination du type « ∞/∞ »
Il en existe une autre qui n'apparaît ici « 0^0 » dont on reparlera lorsqu'on aura étudié les fonctions exponentielles.

5. Continuité

Intuitivement une fonction est continue si on peut tracer son graphe sans lever le crayon, c'est-à-dire si son graphe ne présente pas de sauts.

De façon plus précise : on dit que f est continue en ψ un point du domaine de définition de f, si la limite de f à droite de ψ et la limite de f à gauche de ψ sont égales et si elles sont égales à la valeur de la fonction en ce point.

Si f n'est pas définie en ψ, mais si la limite de f à droite de ψ et la limite de f à gauche de ψ sont égales, on peut définir un prolongement par continuité de f, en posant $f(\psi)$ égale la valeur de cette limite commune.

Dans la pratique, l'important est de savoir que si deux fonctions f et g sont continues, alors leur somme leur produit, leur quotient, leur composée sont continues là où ils existent.
On se limitera donc à connaître les ensembles sur lesquels les fonctions usuelles (de référence) sont continues :

- Toute fonction polynôme est continue sur R
- La fonction valeur absolue est continue sur R
- La fonction racine est continue sur R^+
- Les fonctions puissances sont continues sur leur domaine de définition
- Les fonctions trigonométriques sont continues sur leur domaine de définition

6. Sens de variation de la fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle I inclus dans le domaine de définition de f.

- On dit que f est croissante sur I si :
  pour tout x, x' éléments de I tels que $x \leq x'$, alors $f(x) \leq f(x')$
- On dit que f est strictement croissante sur I si :
  pour tout x, x' éléments de I tels que $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$

(les antécédents et les images de f varient dans le même sens)

- On dit que f est décroissante sur I si :
  pour tout x, x' éléments de I tels que $x \leq x'$, alors $f(x) \geq f(x')$
- On dit que f est strictement croissante sur I si :
  pour tout x, x' éléments de I tels que $x < x'$, alors $f(x) > f(x')$

(les antécédents et les images de f varient en sens inverse)

Pour étudier le sens de variation d'une fonction sur I on se ramène donc à l'étude du signe du rapport :

$$\tau = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$$ (taux de variation de la fonction entre x et x').

D'après les définitions précédentes :

- si τ est positif sur I alors f(x) – f(x') et (x – x') sont de même signe sur I donc f est croissante sur I
- si τ est négatif sur I alors f(x) – f(x') et (x – x') sont de signes opposés sur I donc f est décroissante sur I

Mais ce rapport peut être lié à la notion de dérivée de la fonction.

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x, définie sur un intervalle I.
Soit $x_0 \in$ I , on dit que ***f est dérivable en x_0*** si :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existe et est finie}$$

la limite est appelé ***nombre dérivé de f en x_0***, et on note :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Si f est dérivable en x_0, on peut aussi écrire que :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Remarque : le nombre dérivé est la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point (x_0 , $f(x_0)$) : en effet il s'agit de la limite de la pente de la droite passant par (x_0 , $f(x_0)$) et par un autre point (x, f(x)), c'est –à-dire la pente de la « sécante » à la courbe qui passe par un seul point : (x_0 , $f(x_0)$) .

On peut alors admettre le résultat général suivant :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I (en tout point de I) :

- Si la dérivée de f est strictement positive sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si la dérivée de f est strictement négative sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si la dérivée de f est nulle sur I, alors f est constante sur I.

<u>Remarques :</u>

- Si la fonction admet une dérivée nulle en un point, alors la courbe représentative de cette fonction admet une tangente horizontale en ce point.
- Si les inégalités sont larges pour le signe de la dérivée la fonction est soit croissante soit décroissante
- L'hypothèse I est un intervalle est primordiale, en effet si la fonction est définie sur une réunion d'intervalles et même si sa dérivée est négative sur le domaine de définition en entier, la fonction n'est pas nécessairement décroissante sur le domaine dans sa globalité : elle est décroissante sur chacun des intervalles formant le domaine.
- On a l'habitude de présenter l'étude du signe de la dérivée de f, puis celle des variations de f dans un tableau qu'on appelle ***tableau de variation de la fonction*** (cf. plus loin)
- On a besoin d'étudier le signe de la dérivée d'une fonction pour connaître son sens de variation, il faut donc autant que possible, garder l'expression de la dérivée sous forme factorisée. (L'étude du signe d'un produit est toujours beaucoup plus simple que celui d'une somme)

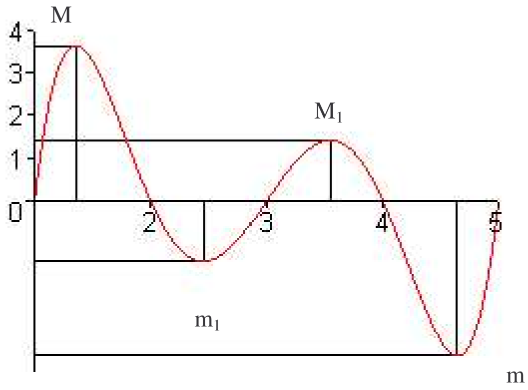
Soit f une fonction numérique définie sur D une partie de R.

On dit que f admet un ***maximum absolu M en x_0*** si $f(x_0) = M$ et
pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$
On dit que f admet un ***maximum local M en x_0,*** si $f(x_0) = M$ et :
il existe un intervalle ouvert $I \subset D$ tel que pour tout $x \in I \subset D$, $f(x) \leq M$

On dit que f admet un ***minimum absolu m en x_0*** si $f(x_0) = m$ et
pour tout $x \in D$, $f(x) \geq m$
On dit que f admet un ***minimum local m en x_0***, si $f(x_0) = m$ et
il existe un intervalle ouvert $I \subset D$ tel que pour tout $x \in I \subset D$, $f(x) \geq m$

On dit que f admet un ***extremum en x_0***, s'il elle y admet un maximum ou un minimum, local ou non.

<u>*Exemple :*</u> Sur la représentation graphique ci-dessous



- M est un maximum absolu
- m est un minimum absolu
- M_1 est un maximum local
- m_1 est un minimum local

<u>Remarque :</u>
Il faut être prudent lorsqu'on est en un point qui est une des bornes de l'intervalle sur lequel on étudie la fonction :
Pour $f(x) = 1/x$, il n'y a pas d'extremum en $x = 0$ (la fonction tend vers l'infini) alors que dans le dernier exemple on a un minimum local en $x = 0$….

En étudiant le graphe de l'exemple on peut pressentir le théorème suivant que nous admettrons :

<u>Théorème</u>
> Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I
> et si f admet un extremum local en $c \in I$
> alors $f'(c) = 0$

<u>Remarques :</u>
- La réciproque de ce théorème est fausse : $f(x) = x^3$ admet une dérivée nulle en 0, et pourtant elle n'y admet pas d'extremum
- Une fonction non dérivable en un point, peut quand même y admettre un extremum, par exemple la fonction définie par $f(x)= | x |$

On peut prouver une variante de la réciproque qui elle est toujours vérifiée :

Théorème

> Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I,
> si f ' s'annule en un point c de I,
> et si f ' change de signe en ce point ,
> alors f admet un extremum local en c.

Récapitulatif des dérivées et des opérations usuelles

f(x)	**D_f**	**f ' (x)**	**$D_{f'}$**
k	$x \in R$	0	$x \in R$
x	$x \in R$	1	$x \in R$
x^n	$x \in R$ $n \in N^*$	$n\,x^{n-1}$	$x \in R$ $n \in N^*$
$\frac{1}{x}$	$x \in R^*$	$\frac{-1}{x^2}$	$x \in R^*$
$\frac{1}{x^n}$	$x \in R^*$ $n \in N^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$x \in R^*$ $n \in N^*$
$\sqrt{x}$	$x \in R^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in R^{*+}$

Fonction	**Dérivée**	**Domaine**
u + v	u' + v'	$D_u \cap D_v$
uv	u' v + u v'	$D_u \cap D_v$
λu	$\lambda u'$	D_u
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$	$D_v - \{x : v(x) = 0\}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$D_v - \{x : v(x) = 0\}$
v o u	u' . v'o u	{x : u est dérivable en x et v est dérivable en u(x)}

7. Branches infinies

- Soit a un nombre réel n'appartenant pas au domaine de définition de f, si f(x) tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers a, on dit que la droite d'équation x = a est ***asymptote*** au graphe de f. On dit aussi que le graphe de f admet x = a comme ***asymptote verticale***

- Soit l un nombre réel, si f(x) tend vers l quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, on dit que la droite d'équation y = l est ***asymptote*** au graphe de f.

On dit aussi que le graphe de f admet y = l comme ***asymptote horizontale***

- Soit maintenant le cas où f(x) tend vers +∞ ou -∞ quand x tend vers +∞ ou -∞.
  On forme tout d'abord le rapport $\frac{f(x)}{x}$.
  - Si ce rapport tend vers 0 quand x tend vers +∞ ou -∞, on dit que le graphe de f présente une ***branche parabolique horizontale (dans la direction de Ox)***
  - Si ce rapport tend vers +∞ ou - ∞ quand x tend vers +∞ ou -∞, on dit que le graphe de f présente une ***branche parabolique verticale (dans la direction de Oy)***
  - Si ce rapport tend vers un nombre réel non nul a quand x tend vers +∞ ou -∞, on dit que le graphe de f présente une ***branche infinie dans la direction de pente a.***
    - Si f(x) – ax tend vers +∞ ou -∞, on dit que le graphe de f présente ***une branche parabolique dans la direction de pente a.***
    - Si f(x) – ax tend vers une limite finie b, on dit que le graphe de f présente ***la droite y = ax + b comme asymptote oblique.***

    Remarque : le signe de f(x) - ax - b indique les positions relatives du graphe et de son asymptote. S'il est positif : le graphe est au dessus de son asymptote, s'il est négatif le graphe est en dessous de son asymptote.

8. Graphe

On construit alors le graphe de f en utilisant l'ensemble des résultats précédents, en précisant les tangentes et les asymptotes.
On déterminera autant de points que nécessaire pour pouvoir faire un tracé précis, en particulier on pourra rechercher les points d'intersection du graphe et de l'axe des abscisses.

EXERCICES

Faire l'étude complète et donner les graphes des fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 7$$

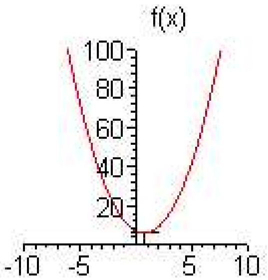
$$g(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^3$$

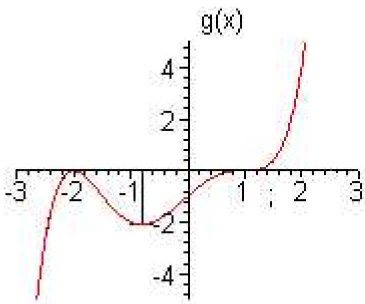
$$h(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x - 3}$$

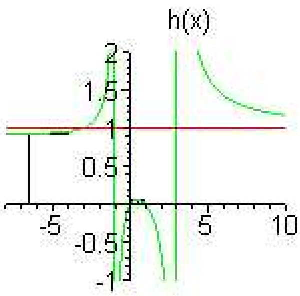
$$k(x) = x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

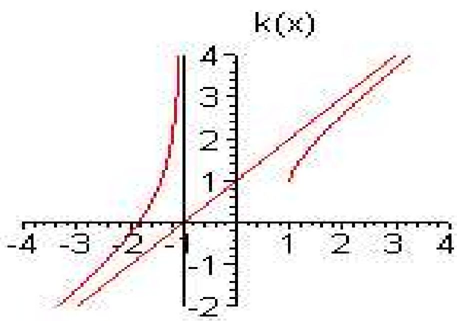
$$l(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 - x + 6}$$

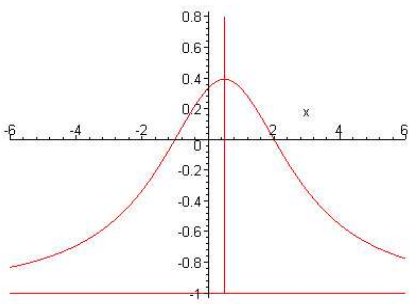
Réponses :











l(x)