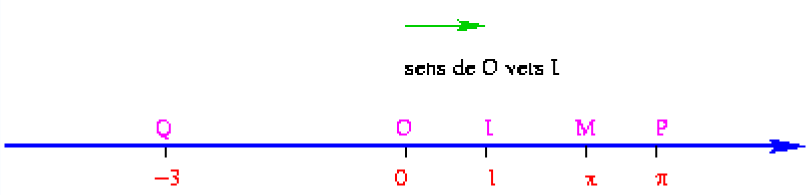
Les nombres réels

I - Généralités :

Les entiers naturels : N servent à compter ce que l'on possède, voit…(positifs)
Les entiers relatifs : Z servent à compter avec une notion de signe (positifs et négatifs).
Les nombres décimaux : D nombres dont on peut donner une écriture décimale avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
Les nombres rationnels : Q s'écrivent sous la forme a/b où a et b sont des entiers relatifs b est non nul. Le développement décimal illimité d'un nombre rationnel est périodique, et réciproquement, un nombre à développement décimal périodique est toujours rationnel.
Les nombres irrationnels : Tous ceux qu'on ne peut pas écrire sous la forme d'un rationnel : exemple $\sqrt{2}$, π ou e. Leur écriture décimale illimitée n'est pas périodique.
Les nombres réels : nombres utilisées pour représenter une quantité continue. Ils incluent tous les précédents, ils sont souvent représentés sur une droite.



II – Valeur absolue

Par définition $|x| = x$ si x est positif ou nul
$|x| = -x$ si x est négatif.

III – Rappels généraux sur les puissances et les radicaux

Pour a et b deux réels non nuls et n et p deux entiers :

$a^n = a\ldots a$ (n facteurs)	$a^0 = 1$	$a^1 = a$	$a^{-n} = 1/a^n$
$a^n.a^p = a^{n+p}$	$(a^n)^p = a^{np}$	$a^n/a^p = a^{n-p}$	
$(ab)^n = a^n b^n$	$a^n/b^n = (a/b)^n$		

Si a est un nombre positif ou nul $\sqrt{a}$ est le nombre positif tel que $(\sqrt{a})^2 = a$
En particulier $\sqrt{a^2} = |a|$

Si a est un nombre positif et n est un entier naturel non nul on pose $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
Les règles énoncées précédemment se généralisent.

De même on peut appliquer ces règles aux puissances de 10 qui apparaissent naturellement dans tous les systèmes d'unités.

Toutes les règles précédentes s'appliquent en particulier au nombre 10 pour lequel on a de plus les règles d'écriture suivantes :

10^n est un nombre dont l'écriture décimale est 1 suivi de n zéros.

10^{-n} est un nombre dont l'écriture décimale est 0,0…1 avec n zéros.

Ecriture décimale	10^p	nom usuel	préfixe	unité	abbréviation
	10^{-15}	billiardième	femto	femtomètre	fm
	10^{-12}	billionième	pico	picomètre	pm
	10^{-10}			angström	Å
0,000000001	10^{-9}	milliardième	nano	nanomètre	nm
0,00000001	10^{-8}	cent millionièmes			
0,0000001	10^{-7}	dix millionièmes			
0,000001	10^{-6}	millionième	micro	micromètre	µm
0,00001	10^{-5}	cent millièmes			
0,0001	10^{-4}	dix millièmes			
0,001	10^{-3}	millième	milli	millimètre	mm
0,01	10^{-2}	centième	centi	centimètre	cm
0,1	10^{-1}	dixième	déci	décimètre	dm
1	10^{0}	unité		mètre	m
10	10^{1}	dizaine	déca	décamètre	dam
100	10^{2}	centaine	hecto	hectomètre	hm
1000	10^{3}	millier	kilo	kilomètre	km
10000	10^{4}	dix milliers			
100000	10^{5}	cent milliers			
1000000	10^{6}	million	méga	mégamètre	Mm
10000000	10^{7}	dix millions			
100000000	10^{8}	cent millions			
1000000000	10^{9}	milliard	giga	gigamètre	Gm
	10^{12}	bilion	téra	téramètre	Tm
	10^{15}	billiard	peta	pétamètre	Pm

IV– Ecriture scientifique d'un nombre – Approximation décimale d'un nombre réel.

<u>L'écriture scientifique des nombres</u>
Tout nombre dont on connaît un certain nombre de chiffres du développement décimal s'écrit sous la forme a . 10^n, où n est un entier relatif et a est un nombre décimal compris entre 1 et 9.

<u>Approximation</u>
Si x un réel **positif**, à tout entier naturel n est associé un unique décimal p_n tel que :

$$p_n.10^{-n} \leq x < p_n.10^{-n} + 10^{-n}$$

Le nombre $p_n.10^{-n}$ est l'approximation décimale par défaut à 10^{-n} près de x

Le nombre $(p_n + 1).10^{-n}$ est l'approximation décimale par excès à 10^{-n} près de x

V – Intervalles

Notations : $+\infty$ est un « nombre » strictement plus grand que tout autre réel
$-\infty$ un « nombre » strictement plus petit que tout autre réel .
$\bar{R} = R \cup \{-\infty ; +\infty\}$

On appelle **intervalle** réel tout ensemble de réels compris (au sens strict ou au sens large) entre deux éléments de $\bar{R}$ qu'on appelle les **bornes** de l'intervalle.

Exemples :
Si a et b sont deux réels

$[a,b] = \{x \in R$ tels que $a \leq x \leq b\}$	fermé, on parle de segment
$]a,b] = \{x \in R$ tels que $a < x \leq b\}$	semi-ouvert à gauche ou semi-fermé à droite
$[a,b[= \{x \in R$ tels que $a \leq x < b\}$	semi-ouvert à droite ou semi-fermé à gauche
$]a,b[= \{x \in R$ tels que $a < x < b\}$	ouvert
$[a, +\infty[= \{x \in R$ tels que $a \leq x \}$	fermé à gauche
$]a, +\infty[= \{x \in R$ tels que $a < x \}$	ouvert
$]-\infty,a] = \{x \in R$ tels que $x \leq a\}$	fermé à droite
$]-\infty,a[= \{x \in R$ tels que $x < a\}$	ouvert
$]-\infty, +\infty[= R$	ouvert

VI – Opérations sur les encadrements.

Si on considère des **nombres a, b, c et d tous strictement positifs**,
et si on sait que $a < x < b$ et $c < y < d$.

On peut écrire :
- $a + c < x + y < b + d$
- $ac < xc < bc$
- $-a > -x > -b$
- $ac < xy < bd$
- $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$
- $-b < -x < -a$