



Seminaire d'analyse de Caen  
La Géométrie des cordes, les modèles A et B de Witten  
Exposé II: Le modèle  $B$  et la symétrie miroir

Ph Durand

CNAM PARIS

7 juin 2011

# Plan de l'exposé

## 1 Introduction

# Plan de l'exposé

- ① Introduction
- ② Le modèle de Landau Ginzburg et la déformation des variétés complexes.

# Plan de l'exposé

- ① Introduction
- ② Le modèle de Landau Ginzburg et la déformation des variétés complexes.
- ③ Variétés de Calabi-Yau et théorie de la déformation.

# Plan de l'exposé

- ① Introduction
- ② Le modèle de Landau Ginzburg et la déformation des variétés complexes.
- ③ Variétés de Calabi-Yau et théorie de la déformation.
- ④ La symétrie miroir des cordes fermées.

# Plan de l'exposé

- ① Introduction
- ② Le modèle de Landau Ginzburg et la déformation des variétés complexes.
- ③ Variétés de Calabi-Yau et théorie de la déformation.
- ④ La symétrie miroir des cordes fermées.
- ⑤ Conclusion : Application à la géométrie énumérative.

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Le modèle de Landau Ginzburg et la déformation des variétés complexes.
- 3 Variétés de Calabi-Yau et théorie de la déformation.
- 4 La symétrie miroir des cordes fermées.
- 5 Conclusion : Application à la géométrie énumérative.
- 6 Références

# I) Introduction

## Symétrie miroir

La ***symétrie miroir*** postule qu'il existe ***deux points de vues*** pour se représenter la physique des cordes fermioniques. La pertinence provient du fait que certains problèmes non résolubles d'un certain point de vue le sont par l'autre.



# I) Introduction

## Symétrie miroir

La **symétrie miroir** postule qu'il existe **deux points de vues** pour se représenter la physique des cordes fermioniques. La pertinence provient du fait que certains problèmes non résolubles d'un certain point de vue le sont par l'autre.

## T- dualité

La symétrie miroir est la forme très aboutie de la **T-dualité** apparue en théorie bosoniques qui affirme que la fonction de partition reste inchangée dans le changement  $R \leftrightarrow \frac{1}{R}$ ,  $R$  désignant le rayon de compactification d'une dimension supplémentaire.

# I) Introduction

## Symétrie miroir

La ***symétrie miroir*** postule qu'il existe deux points de vues pour se représenter la physique des cordes fermioniques. La pertinence provient du fait que certains problèmes non résolubles d'un certain point de vue le sont par l'autre.

## T- dualité

La symétrie miroir est la forme très aboutie de la ***T-dualité*** apparue en théorie bosoniques qui affirme que la fonction de partition reste inchangée dans le changement  $R \leftrightarrow \frac{1}{R}$ ,  $R$  désignant le rayon de compactification d'une dimension supplémentaire.

## Variation de structure symplectique, complexe

Dans une théorie de champs bosonique, où l'espace source est le cylindre et le but un tore on peut remarquer que La ***T-dualité*** échange déformation de structure symplectique (Aire) et déformation de structure complexe.

## II) Modèle de Landau Ginzburg et variétés complexes

### Fonctions de corrélation du coté complexe

Les fonctions de corrélations ont été calculées à partir des instantons : courbes holomorphes dans le cadre symplectique, dans ce contexte, elles vont être calculées à partir des outils de la géométrie complexe ; Le point de départ est la physique statistique et l'école russe d'**Arnold** et sa *théorie des singularités*.

## II) Modèle de Landau Ginzburg et variétés complexes

### Fonctions de corrélation du coté complexe

Les fonctions de corrélations ont été calculées à partir des instantons : courbes holomorphes dans le cadre symplectique, dans ce contexte, elles vont être calculées à partir des outils de la géométrie complexe ; Le point de départ est la physique statistique et l'école russe d'**Arnold** et sa **théorie des singularités**.

### Théorie $\varphi^4$ et Géométrie complexe

Le modèle de **Landau Ginzburg** joue un rôle décisif de ce coté du miroir, où l'on va s'intéresser à des déformations admissibles (perturbations marginales) préservant certaines symétries.

## II) Modèle de Landau Ginzburg et variétés complexes

### Fonctions de corrélation du coté complexe

Les fonctions de corrélations ont été calculées à partir des instantons : courbes holomorphes dans le cadre symplectique, dans ce contexte, elles vont être calculées à partir des outils de la géométrie complexe ; Le point de départ est la physique statistique et l'école russe d'Arnold et sa théorie des singularité.

### Théorie $\varphi^4$ et Géométrie complexe

Le modèle de **Landau Ginzburg** joue un rôle décisif de ce coté du miroir, ou l'on va s'intéresser à des déformations admissibles (perturbations marginales) préservant certaines symétries.

### Lagrangien du ferromagnetisme

On part du lagrangien en  $\varphi^4$  :

$$\mathcal{L}_{LG} = \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - V(T, \phi) \text{ où } V(T, \phi) = \frac{1}{4!} \lambda(t) \phi^4 + \frac{1}{2!} \mu^2(t) \phi^2$$

# Température, point critique

## Température critique

A la température critique  $T_c$ , "la masse",  $\mu^2(T_c) = 0$ , donc la longueur de corrélation (inverse de la masse) est infinie. A cette température le champ  $\phi_0$  solution de  $\frac{\partial}{\partial \phi} V(T, \phi)$  est zero trois fois dégénéré.

# Température, point critique

## Température critique

A la température critique  $T_c$ , "la masse",  $\mu^2(T_c) = 0$ , donc la longueur de corrélation (inverse de la masse) est infinie. A cette température le champ  $\phi_0$  solution de  $\frac{\partial}{\partial \phi} V(T, \phi)$  est zero trois fois dégénéré.

## Perturbation

Une petite perturbation  $V(T_c, \phi) \rightarrow V(T_c, \phi) + \delta\mu^2(T)\phi^2$ , **résoud** la singularité et par ce fait **"brise la symétrie"**.

# Température, point critique

## Température critique

A la température critique  $T_c$ , "la masse",  $\mu^2(T_c) = 0$ , donc la longueur de corrélation (inverse de la masse) est infinie. A cette température le champ  $\phi_0$  solution de  $\frac{\partial}{\partial \phi} V(T, \phi)$  est zero trois fois dégénéré.

## Perturbation

Une petite perturbation  $V(T_c, \phi) \rightarrow V(T_c, \phi) + \delta\mu^2(T)\phi^2$ , **résoud** la singularité et par ce fait **"brise la symétrie"**.

## Challenge

Trouver le moyen de perturber **marginalement** une théorie de potentiel de manière à préserver la symétrie : et définir par le fait une famille critique de superpotentiels.



# Superpotentiel de Landau Ginzburg

## Définition

Le superpotentiel est une fonction holomorphe  $\mathcal{W} : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}$ , on choisit un potentiel sous la forme  $V(x) = \sum_1^N |\partial_i \mathcal{W}(X)|^2 = \sum_1^N \partial_i \mathcal{W}(X) \partial_i \mathcal{W}(X)^*$

Si on ne considère qu'un seul champ, on peut considérer la fonction :

$$\mathcal{W}(X) = \frac{1}{(n+1)!} X^{n+1}$$

# Superpotentiel de Landau Ginzburg

## Définition

Le superpotentiel est une fonction holomorphe  $\mathcal{W} : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}$ , on choisit un potentiel sous la forme  $V(x) = \sum_1^N |\partial_i \mathcal{W}(X)|^2 = \sum_1^N \partial_i \mathcal{W}(X) \partial_i \mathcal{W}(X)^*$

Si on ne considère qu'un seul champ, on peut considérer la fonction :

$$\mathcal{W}(X) = \frac{1}{(n+1)!} X^{n+1}$$

## Lagrangien LG-supersymétrique

La partie bosonique du lagrangien supersymétrique s'écrit alors :

$$\mathcal{L}_{N=2}^{LG} = -\partial_+ X^* \partial_- X + \partial_- X^* \partial_+ X + V(X)$$

# Superpotentiel de Landau Ginzburg

## Définition

Le superpotentiel est une fonction holomorphe  $\mathcal{W} : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}$ , on choisit un potentiel sous la forme  $V(x) = \sum_1^N |\partial_i \mathcal{W}(X)|^2 = \sum_1^N \partial_i \mathcal{W}(X) \partial_i \mathcal{W}(X)^*$

Si on ne considère qu'un seul champ, on peut considérer la fonction :

$$\mathcal{W}(X) = \frac{1}{(n+1)!} X^{n+1}$$

## Lagrangien LG-supersymétrique

La partie bosonique du lagrangien supersymétrique s'écrit alors :

$$\mathcal{L}_{N=2}^{LG} = -\partial_+ X^* \partial_- X + \partial_- X^* \partial_+ X + V(X)$$

## Extremums du potentiel

On a :  $V(X) = 0 \Leftrightarrow \partial_i \mathcal{W}(X_0) = 0$ , ainsi il est pertinent de définir l'**anneau**

**Chiral**  $\mathcal{R}_{\mathcal{W}} = \frac{\mathbb{C}[X]}{\partial \mathcal{W}(X)}$  où le quotient va pour les polynômes proportionnels

à  $\partial_i \mathcal{W}(X) : P(X) = P^i(X) \partial_i \mathcal{W}(X)$

# Théorie des singularités, déformations marginales

## Superpotential déformé

les déformations respectant l'anneau Chiral sont données par :

$$\mathcal{W}_{def}(X) = \mathcal{W}(X) + \sum_{P \in \mathcal{R}_{\mathcal{W}}} t_P P(X)$$

# Théorie des singularités, déformations marginales

## Superpotentiel déformé

les déformations respectant l'anneau Chiral sont données par :

$$\mathcal{W}_{def}(X) = \mathcal{W}(X) + \sum_{P \in \mathcal{R}_{\mathcal{W}}} t_P P(X)$$

## Exemple

Si on choisit  $\mathcal{W}(X, Y, Z) = \frac{1}{3}(X^3 + Y^3 + Z^3)$ , le potentiel déformé est donné par :

$$\mathcal{W}_{def}(X, Y, Z) = \mathcal{W}(X, Y, Z) + t_0 + t_1 X + t_2 Y + t_3 Z + t_4 XY + t_5 YZ + t_6 ZX + t_7 XYZ$$

# Théorie des singularités, déformations marginales

## Superpotentiel déformé

les déformations respectant l'anneau Chiral sont données par :

$$\mathcal{W}_{def}(X) = \mathcal{W}(X) + \sum_{P \in \mathcal{R}_{\mathcal{W}}} t_P P(X)$$

## Exemple

Si on choisit  $\mathcal{W}(X, Y, Z) = \frac{1}{3}(X^3 + Y^3 + Z^3)$ , le potentiel déformé est donné par :

$$\mathcal{W}_{def}(X, Y, Z) = \mathcal{W}(X, Y, Z) + t_0 + t_1 X + t_2 Y + t_3 Z + t_4 XY + t_5 YZ + t_6 ZX + t_7 XYZ$$

## Déformations marginales

Seule la non nullité de  $\mu = t_7$  préserve le caractère critique, il ne brise pas non plus la  $\mathbb{Z}_3$  symétrie  $(X, Y, Z) \rightarrow (\exp(\frac{2ki\pi}{3})X, \exp(\frac{2ki\pi}{3})Y, \exp(\frac{2ki\pi}{3})Z)$  on vient de définir une famille **continue** de perturbations **permises** :

$$\mathcal{W}_{def}(X, Y, Z, \mu) = \frac{1}{3}(X^3 + Y^3 + Z^3) + \mu XYZ$$

### III) Variétés de Calabi-Yau, Théorie de la déformation

#### Superpotentiel et variétés de Calabi Yau

l'hypersurface d'un espace projectif complexe obtenue en annulant  $\mathcal{W}_{def}(X, Y, Z, \mu) = \frac{1}{3}(X^3 + Y^3 + Z^3) + \mu XYZ$  est l'exemple le plus simple de variété de Calabi-Yau, c'est une courbe elliptique, ou tore complexe.

### III) Variétés de Calabi-Yau, Théorie de la déformation

#### Superpotentiel et variétés de Calabi Yau

l'hypersurface d'un espace projectif complexe obtenue en annulant  $\mathcal{W}_{def}(X, Y, Z, \mu) = \frac{1}{3}(X^3 + Y^3 + Z^3) + \mu XYZ$  est l'exemple le plus simple de variété de Calabi-Yau, c'est une courbe elliptique, ou tore complexe.

#### Définition

Une variété de **Calabi-Yau** est une variété Kählérienne Ricci plate ce qui revient à dire que le fibré canonique est trivial. Il y a entre autre les surfaces K3 qui interviennent en théorie des branes, et les quintiques threefolds pour les cordes fermées.



# III) Variétés de Calabi-Yau, Théorie de la déformation

## Superpotentiel et variétés de Calabi Yau

L'hypersurface d'un espace projectif complexe obtenue en annulant  $W_{def}(X, Y, Z, \mu) = \frac{1}{3}(X^3 + Y^3 + Z^3) + \mu XYZ$  est l'exemple le plus simple de variété de Calabi-Yau, c'est une courbe elliptique, ou tore complexe.

## Définition

Une variété de **Calabi-Yau** est une variété Kählérienne Ricci plate ce qui revient à dire que le fibré canonique est trivial. Il y a entre autre les surfaces K3 qui interviennent en théorie des branes, et les quintiques threefolds pour les cordes fermées.

## Hypersurfaces

Le moyen le plus simple de réaliser des variétés de Calabi-Yau est de considérer une **hypersurface d'un espace projectif complexe**. Il existe une contrainte forte entre le degré d'une hypersurface et la dimension de l'espace ambiant.

# Exemple de variétés de Calabi-Yau

## Suite exacte d'une hypersurface

Ecrivons la suite exacte associée à une hypersurface de degré  $d$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(-d) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

Avec la suite exacte longue en cohomologie, on peut calculer les groupes de cohomologies associés

# Exemple de variétés de Calabi-Yau

## Suite exacte d'une hypersurface

Ecrivons la suite exacte associée à une hypersurface de degré  $d$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(-d) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

Avec la suite exacte longue en cohomologie, on peut calculer les groupes de cohomologies associés

## Resultat

$H^n(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}^{\binom{d-1}{n-1}} = \mathbb{C}$  (**Condition de Calabi-Yau**) Donc nécessairement  $d = n + 2$

# Exemple de variétés de Calabi-Yau

## Suite exacte d'une hypersurface

Ecrivons la suite exacte associée à une hypersurface de degré  $d$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(-d) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

Avec la suite exacte longue en cohomologie, on peut calculer les groupes de cohomologies associés

## Resultat

$$H^n(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}^{C_{n-1}^{d-1}} = \mathbb{C} \text{ (**Condition de Calabi-Yau**)} \text{ Donc nécessairement } d = n + 2$$

## Exemples

- ▶  $n = 1$  ( $d=3$ ) : **Courbes elliptiques**
- ▶  $n = 2$  ( $d=4$ ) : **Surfaces K3**
- ▶  $n = 3$  ( $d=5$ ) : **Quintic threefold**

# Une variété de Calabi Yau



# Déformations

## Deux types

On va s'intéresser à deux types de **déformations** des variétés de Calabi-Yau : les déformations de sa structure symplectique et celles provenant de sa structure complexe.

# Déformations

## Deux types

On va s'intéresser à deux types de **déformations** des variétés de Calabi-Yau : les déformations de sa structure symplectique et celles provenant de sa structure complexe.

## Déformation de structure complexe

On peut envisager la déformation de la structure complexe (**déformation de  $J$** ). Elle est captée par  $H^1(X, TX) \simeq H^{2,1}(X)$

# Déformations

## Deux types

On va s'intéresser à deux types de **déformations** des variétés de Calabi-Yau : les déformations de sa structure symplectique et celles provenant de sa structure complexe.

## Déformation de structure complexe

On peut envisager la déformation de la structure complexe (**déformation de  $J$** ). Elle est captée par  $H^1(X, TX) \simeq H^{2,1}(X)$

## Déformation de la forme de Kähler

On peut aussi faire varier la structure Kählérienne, repérée par  $H^{1,1}(X) = H^1(X, \Omega_X^1)$



## IV) Symétrie miroir des cordes fermées

### Symétrie miroir

On a deux théories de champs (**CFT**) supersymétriques, en dualité satisfaisant :  $h^{2,1}(X) = h^{1,1}(MX)$  et  $h^{1,1}(X) = h^{2,1}(MX)$  : déformer la structure complexe de  $M$  revient à déformer le volume de son miroir.



## "B side" Origine Physique

### A side

Les contraintes supersymétriques conduisent à ce que l'action ne **dépende que de la forme de Kähler**; les instantons sont les courbes holomorphes. Le calcul des fonctions de corrélations est difficile car il tient compte de la correction sur le degré des courbes (***invariants de Gromov-Witten***)

## "B side" Origine Physique

### A side

Les contraintes supersymétriques conduisent à ce que l'action ne **dépende que de la forme de Kähler**; les instantons sont les courbes holomorphes. Le calcul des fonctions de corrélations est difficile car il tient compte de la correction sur le degré des courbes (**invariants de Gromov-Witten**)

### B side

Le formalisme BRST expliqué du côté A du miroir s'applique : ici Les instantons sont les applications constantes du world-sheet  $\Sigma$  sur un point de l'espace  $X$ . Les fonctions de corrélations sont plus simples à calculer : elles nécessitent pas de **correction instanton**.

Si  $X$  est une variété de Calabi-Yau de dimension 3, la fonction de corrélation à 3 points est :

$$\langle W_A W_B W_C \rangle = \int_X \Omega^{jkl} A_j \wedge B_k \wedge C_l \wedge \Omega$$

$A, B, C$  appartiennent à  $H^1(X, TX)$  et **dépendent de la structure complexe**,  $\Omega$  est la  $(3, 0)$  top-forme **holomorphe**.

# Calcul des fonctions de corrélations

## Principe de symétrie miroir

Les deux nombres  $\underline{h^{1,1}(X)=1}$  et  $\underline{h^{2,1}(X)=101}$ , comptent le nombre de déformations respectivement des structures kählérienne et complexes. Le principe de symétrie miroir, donne  $\underline{h^{1,1}(MX)=101}$  et  $\underline{h^{2,1}(MX)=1}$ . Il dit en plus que les **fonctions de corrélations** calculées des deux cotés du miroir sont **identiques**.

# Calcul des fonctions de corrélations

## Principe de symétrie miroir

Les deux nombres  $\underline{h^{1,1}(X)=1}$  et  $\underline{h^{2,1}(X)=101}$ , comptent le nombre de déformations respectivement des structures kählérienne et complexes. Le principe de symétrie miroir, donne  $\underline{h^{1,1}(MX)=101}$  et  $\underline{h^{2,1}(MX)=1}$ . Il dit en plus que les **fonctions de corrélations** calculées des deux cotés du miroir sont **identiques**.

## Mirror map

L'application miroir (**Mirror map**) associe au paramètre de déformation de structure kählérienne le paramètre de déformation de structure complexe.

# Calcul des fonctions de corrélations

## Principe de symétrie miroir

Les deux nombres  $\underline{h^{1,1}(X)=1}$  et  $\underline{h^{2,1}(X)=101}$ , comptent le nombre de déformations respectivement des structures kählérienne et complexes. Le principe de symétrie miroir, donne  $\underline{h^{1,1}(MX)=101}$  et  $\underline{h^{2,1}(MX)=1}$ . Il dit en plus que les **fonctions de corrélations** calculées des deux cotés du miroir sont **identiques**.

## Mirror map

L'application miroir (**Mirror map**) associe au paramètre de déformation de structure kählérienne le paramètre de déformation de structure complexe.

## Application

**En physique** Si un problème est difficile du côté  $A$ , on peut tenter de le résoudre du côté  $B$ , **En mathématique** le passage par l'application miroir permet de résoudre de **manière crucial** de vieux problème de **géométrie énumérative**

# Le Quintic et son miroir

## Quintic threefold

On rappelle que la **quintique homogène** de  $\mathbb{P}^4$ , est obtenue en annulant le superpotentiel :  $\mathcal{W} = \frac{1}{5}(X_0^5 + \dots + X_4^5)$



# Le Quintic et son miroir

## Quintic threefold

On rappelle que la **quintique homogène** de  $\mathbb{P}^4$ , est obtenue en annulant le superpotential :  $\mathcal{W} = \frac{1}{5}(X_0^5 + \dots + X_4^5)$

## Déformation marginale

Une **déformation marginale** de ce superpotential est **presque** la variété miroir recherchée

# Le Quintic et son miroir

## Quintic threefold

On rappelle que la **quintique homogène** de  $\mathbb{P}^4$ , est obtenue en annulant le superpotential :  $\mathcal{W} = \frac{1}{5}(X_0^5 + \dots + X_4^5)$

## Déformation marginale

Une **déformation marginale** de ce superpotential est **presque** la variété miroir recherchée

## Miroir du quintique

la **variété miroir** associé à cette quintique est **une crepant résolution** de :

$$\{(X_0, \dots, X_4) \in \mathbb{P}^4 / \frac{1}{5}(X_0^5 + \dots + X_4^5) - \mu X_0 \dots X_4 = 0\} / G$$

$$\text{avec } G = \{(a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{Z}/5 / \sum a_i = 0\} / \mathbb{Z}/5 = \{(a, a, a, a, a)\} \simeq (\mathbb{Z}/5)^3$$

# Programme a suivre

## localisation

La construction globale de l'*application miroir* est difficile. Il faut localiser et la construire au *voisinage d'un point*.

# Programme a suivre

## localisation

La construction globale de l'*application miroir* est difficile. Il faut localiser et la construire au *voisinage d'un point*.

## Plan d'etude

On note  $X$  la variété de Calabi-Yau,  $MX$  son miroir.

- ▶ On doit d'abord calculer les *couplage de Yukawa* de  $H^1(MX, TMX)$

# Programme a suivre

## localisation

La construction globale de l'**application miroir** est difficile. Il faut localiser et la construire au **voisinage d'un point**.

## Plan d'étude

On note  $X$  la variété de Calabi-Yau,  $MX$  son miroir.

- ▶ On doit d'abord calculer les **couplage de Yukawa** de  $H^1(MX, TMX)$
- ▶ Identifier par l'application miroir.

# Programme a suivre

## localisation

La construction globale de l'**application miroir** est difficile. Il faut localiser et la construire au **voisinage d'un point**.

## Plan d'etude

On note  $X$  la variété de Calabi-Yau  $MX$ , son miroir.

- ▶ On doit d'abord calculer les **couplage de Yukawa** de  $H^1(MX, TMX)$
- ▶ Identifier par l'application miroir
- ▶ En déduire les couplages de Yukawa de  $H^{1,1}(X)$

# Programme a suivre

## localisation

La construction globale de l'**application miroir** est difficile. Il faut localiser et la construire au **voisinage d'un point**.

## Plan d'étude

On note  $X$  la variété de Calabi-Yau  $MX$ , son miroir.

- ▶ On doit d'abord calculer les **couplage de Yukawa** de  $H^1(MX, TMX)$
- ▶ Identifier par l'application miroir
- ▶ En déduire les couplages de Yukawa de  $H^{1,1}(X)$

On peut en déduire des prédictions sur le nombre de courbes rationnelles dans  $X$

# Programme à suivre

## localisation

La construction globale de l'**application miroir** est difficile. Il faut localiser et la construire au **voisinage d'un point**.

## Plan d'étude

On note  $X$  la variété de Calabi-Yau  $MX$ , son miroir.

- ▶ On doit d'abord calculer les **couplage de Yukawa** de  $H^1(MX, TMX)$
- ▶ Identifier par l'application miroir
- ▶ En déduire les couplages de Yukawa de  $H^{1,1}(X)$

On peut en déduire des prédictions sur le nombre de courbes rationnelles dans  $X$

## Outils mathématiques

On va décrire dans la suite sommairement **la mathématique utile** pour le  $B$ -side du quintic



# Mirror-map

## Familles à un paramètre

le principe de symétrie miroir dit que  $\langle H, H, H \rangle = \langle \theta, \theta, \theta \rangle$ , si  $tH$  désigne une ***courbe à un paramètre*** dans le module de kähler de  $X$ , on pose  $H = \frac{d}{dt} = 2\pi i q \frac{d}{dq}$  son vecteur tangent ( $q = \exp(2\pi i t)$  coordonnées locale dans ce module.

# Mirror-map

## Familles à un paramètre

le principe de symétrie miroir dit que  $\langle H, H, H \rangle = \langle \theta, \theta, \theta \rangle$ , si  $tH$  désigne une ***courbe à un paramètre*** dans le module de kähler de  $X$ , on pose  $H = \frac{d}{dt} = 2\pi i q \frac{d}{dq}$  son vecteur tangent ( $q = \exp(2\pi i t)$  coordonnées locale dans ce module.

## Application miroir

Le problème est de fabriquer une image  $q(x)$  dans le ***module de déformations complexes***. on a :  $q = q(x), \frac{d}{dq} \rightarrow \frac{dx}{dq} \frac{d}{dx}$

# Mirror-map

## Familles à un paramètre

le principe de symétrie miroir dit que  $\langle H, H, H \rangle = \langle \theta, \theta, \theta \rangle$ , si  $tH$  désigne une **courbe à un paramètre** dans le **module de kähler** de  $X$ , on pose  $H = \frac{d}{dt} = 2\pi i q \frac{d}{dq}$  son vecteur tangent ( $q = \exp(2\pi i t)$  coordonnées locale dans ce module.

## Application miroir

Le problème est de fabriquer une image  $q(x)$  dans le **module de structures complexes**. on a :  $q = q(x)$ ,  $\frac{d}{dq} \rightarrow \frac{dx}{dq} \frac{d}{dx}$

## Correspondance

On a alors  $H = 2\pi i q \frac{d}{dq} \leftrightarrow \theta = 2\pi i q \frac{dx}{dq} \frac{d}{dx}$   
 $\langle H, H, H \rangle = (2\pi i q \frac{d}{dq})^3 \langle \frac{d}{dx}, \frac{d}{dx}, \frac{d}{dx} \rangle = (2\pi i \frac{q}{x} \frac{dx}{dq})^3 \langle x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx} \rangle$

la partie droite du dernier terme est :  $\langle \theta, \theta, \theta \rangle$

# Outils mathématiques

## Courbes elliptiques

Les exemples les plus simples de variétés de Calabi-Yau sont les courbes elliptiques. Elles vont nous servir de guide pour comprendre les techniques définies ci dessous et définir l'application miroir.

# Outils mathématiques

## Courbes elliptiques

Les exemples les plus simples de variétés de Calabi-Yau sont les courbes elliptiques. Elles vont nous servir de guide pour comprendre les techniques définies ci dessous et définir l'application miroir.

## Monodromie

Pour un fibré plat, contourner un objet singulier en  $t = 0$  à distance constante  $t$  (paramètre de déformation d'une famille lisse) se nomme en mathématiques ***monodromie***. En physique on parle de ***boucle de Wilson***.

# Outils mathématiques

## Courbes elliptiques

Les exemples les plus simples de variétés de Calabi-Yau sont les courbes elliptiques. Elles vont nous servir de guide pour comprendre les techniques définies ci dessous et définir l'application miroir.

## Monodromie

Pour un fibré plat, contourner un objet singulier en  $t = 0$  à distance constante  $t$  (paramètre de déformation d'une famille lisse) se nomme en mathématiques **monodromie**. En physique on parle de **boucle de Wilson**.

## Residue map

On peut généraliser la formule des résidues d'une fonction de variables complexes autour de  $z = 0$  en remplaçant fonction par **formes différentielle** et point par **hypersurface**. Cela sera très utile pour calculer des périodes.

## Courbes elliptiques

- La ***courbe elliptique***  $E_\tau = \mathbb{C}/(1, \tau)$  est une variété de Calabi-Yau de ***dimension*** 1.  
La forme volume est donnée par  $\Omega = dz$

# Courbes elliptiques

- La **courbe elliptique**  $E_\tau = \mathbb{C}/(1, \tau)$  est une variété de Calabi-Yau de **dimension** 1.

La forme volume est donnée par  $\Omega=dz$

## Nombres de Hodge

le diamant de Hodge est :

$$\begin{array}{ccccc} & h_{00} & & & 1 \\ h_{10} & & h_{01} & = & 1 & 1 \\ & h_{11} & & & & 1 \end{array}$$



# Courbes elliptiques

- La **courbe elliptique**  $E_\tau = \mathbb{C}/(1, \tau)$  est une variété de Calabi-Yau de **dimension** 1.

La forme volume est donnée par  $\Omega = dz$

## Nombres de Hodge

le diamant de Hodge est :

$$\begin{array}{ccc} & h_{00} & 1 \\ h_{10} & & h_{01} = 1 & 1 \\ & h_{11} & & 1 \end{array}$$

- La famille à un paramètre de déformations d'une courbe elliptique est :

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3\psi XYZ = 0$$

# Courbes elliptiques

- La **courbe elliptique**  $E_\tau = \mathbb{C}/(1, \tau)$  est une variété de Calabi-Yau de **dimension** 1.

La forme volume est donnée par  $\Omega = dz$

## Nombres de Hodge

le diamant de Hodge est :

$$\begin{array}{ccc} & h_{00} & 1 \\ h_{10} & & h_{01} = 1 & 1 \\ & h_{11} & & 1 \end{array}$$

- La famille à un paramètre de déformations d'une courbe elliptique est :  
$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3\psi XYZ = 0$$
- Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des **cycles d'homologie**, ils dépendent alors de  $\psi$ , on peut retrouver  $\tau$  à partir du **rapport des périodes** :  $\int_\alpha \Omega, \int_\beta \Omega$ . En résolvant une **équation différentielle** dite **de Picard-Fuchs**

# Famille de courbes elliptiques, monodromie

## Dégenération d'une famille de courbes

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & \supset & X_t & t \neq t' & X_t \simeq X'_t \\ \pi \downarrow & & \downarrow & & \\ D^2 & \ni & t & t = 0 & X_0 : \text{sing.} \end{array}$$

# Famille de courbes elliptiques, monodromie

## Dégénération d'une famille de courbes

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & \supset & X_t & t \neq t' & X_t \simeq X_{t'} \\ \pi \downarrow & & \downarrow & & \\ D^2 & \ni & t & t = 0 & X_0 : \text{sing.} \end{array}$$

## Théorème de monodromie

Soit,  $X_t$  où  $t$  varie le long d'une boucle dans  $\pi_1(D^2 - \{0\}, t_0)$  autour de 0, (**boucle de Wilson**), tous les éléments de cette famille sont **difféomorphes**. Cela induit un automorphisme en homologie :  $\varphi_* \in \text{Aut}(H_n(X_{t_0}, \mathbb{Z}))$

# Famille de courbes elliptiques, monodromie

## Dégénération d'une famille de courbes

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & \supset & X_t & t \neq t' & X_t \simeq X_{t'} \\ \pi \downarrow & & \downarrow & & \\ D^2 & \ni & t & t = 0 & X_0 : \text{sing.} \end{array}$$

## Théorème de monodromie

Soit,  $X_t$  où  $t$  varie le long d'une boucle dans  $\pi_1(D^2 - \{0\}, t_0)$  autour de 0, (**boucle de Wilson**), tous les éléments de cette famille sont **difféomorphes**. Cela induit un automorphisme en homologie :  $\varphi_* \in \text{Aut}(H_n(X_{t_0}), \mathbb{Z})$

## Exemple d'application

On va l'illustrer en prenant une famille à un paramètre de **courbe elliptique**  $C_t = \{(Y^2Z = X^3 + X^2Z - tZ^3)\} \subset \mathbb{CP}^2$  qui s'exprime en coordonnées affines par :  $C_t : y^2 = x^3 + x^2 - t$  : courbe elliptique définie par une équation algébrique.

## Famille de courbes elliptiques, monodromie.

- Le paramètre  $t$  de cette **courbe elliptique** est la signature de la variation de structure complexe ; l'expression géométrique est  $E_\tau = \mathbb{C}/(1, \tau(t))$  quand  $t$  tourne autour de l'origine  $\tau(t) \rightarrow \tau(t) + 1$ , avec  $\tau$  fonction de  $t$  :  $\tau(t) = \frac{Int}{2\pi i}$

## Famille de courbes elliptiques, monodromie.

- Le paramètre  $t$  de cette **courbe elliptique** est la signature de la variation de structure complexe ; l'expression géométrique est  $E_\tau = \mathbb{C}/(1, \tau(t))$  quand  $t$  tourne autour de l'origine  $\tau(t) \rightarrow \tau(t) + 1$ , avec  $\tau$  fonction de  $t : \tau(t) = \frac{Int}{2\pi i}$

- Au niveaux du groupe d'automorphisme :

$$\begin{pmatrix} \tau(t) \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Famille de courbes elliptiques, monodromie.

- Le paramètre  $t$  de cette **courbe elliptique** est la signature de la variation de structure complexe ; l'expression géométrique est  $E_\tau = \mathbb{C}/(1, \tau(t))$  quand  $t$  tourne autour de l'origine  $\tau(t) \rightarrow \tau(t) + 1$ , avec  $\tau$  fonction de  $t$  :  $\tau(t) = \frac{Int}{2\pi i}$
- Au niveaux du groupe d'automorphisme :
$$\begin{pmatrix} \tau(t) \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- On retrouve le fait que la structure complexe varie mais que la structure symplectique est inchangée.



## Famille de courbes elliptiques, monodromie.

- Le paramètre  $t$  de cette **courbe elliptique** est la signature de la variation de structure complexe ; l'expression géométrique est  $E_\tau = \mathbb{C}/(1, \tau(t))$  quand  $t$  tourne autour de l'origine  $\tau(t) \rightarrow \tau(t) + 1$ , avec  $\tau$  fonction de  $t : \tau(t) = \frac{Int}{2\pi i}$
- Au niveaux du groupe d'automorphisme :
$$\begin{pmatrix} \tau(t) \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- On retrouve le fait que la structure complexe varie mais que la structure symplectique est inchangée.
- On justifie le choix de la nouvelle coordonnée  $q(t) = e^{2\pi i \tau(t)}$ , un passage à la limite donne : quand  $t \rightarrow 0$ ,  $Im\tau(t) \rightarrow +\infty$ , d'où  $q(t)$ , est une fonction holomorphe de  $t$  qui tend aussi vers 0 ; c'est donc une coordonnée locale pour cette famille de courbes elliptiques.

## Famille de courbes elliptiques, monodromie.

- Le paramètre  $t$  de cette **courbe elliptique** est la signature de la variation de structure complexe ; l'expression géométrique est  $E_\tau = \mathbb{C}/(1, \tau(t))$  quand  $t$  tourne autour de l'origine  $\tau(t) \rightarrow \tau(t) + 1$ , avec  $\tau$  fonction de  $t : \tau(t) = \frac{Int}{2\pi i}$
- Au niveaux du groupe d'automorphisme :
$$\begin{pmatrix} \tau(t) \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- On retrouve le fait que la structure complexe varie mais que la structure symplectique est inchangée.
- On justifie le choix de la nouvelle coordonnée  $q(t) = e^{2\pi i \tau(t)}$ , un passage à la limite donne : quand  $t \rightarrow 0$ ,  $Im\tau(t) \rightarrow +\infty$ , d'où  $q(t)$ , est une fonction holomorphe de  $t$  qui tend aussi vers 0 ; c'est donc une coordonnée locale pour cette famille de courbes elliptiques.
- On parle en physique de : **large complex structure limit (LCSL)** en "bijection" avec **large volume limit (LVL)** du côté A

## Application a la quintique

- Soit la **quintique** :  $\sum_{i=0}^4 x_i^5 - \psi x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$ . Comme pour les courbes elliptiques, Morisson a montré en se plaçant au voisinage de  $x = (\frac{1}{\psi})^{-5} = 0$  que l'on pouvait retrouver  $t$  (déformation coté kähler) à partir de  $\psi$  (ou  $x$ ).

## Application a la quintique

- Soit la **quintique** :  $\sum_{i=0}^4 x_i^5 - \psi x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$ . Comme pour les courbes elliptiques, Morisson a montré en se plaçant au voisinage de  $x = (\frac{1}{\psi})^{-5} = 0$  que l'on pouvait retrouver  $t$  (déformation coté kähler) à partir de  $\psi$  (ou  $x$ ).
- Comme pour les courbes elliptiques,  $t = \frac{\int_{\gamma_1} \Omega}{\int_{\gamma_0} \Omega}$ , il faut donc calculer les périodes  $\phi_i(x) = \int_{\gamma_i} \Omega$ ,  $i = 1, 2$ .  $\gamma_0$  est invariant par monodromie autour de  $x = 0$ , (**large complex structure limit (LCSL)**),  $\psi \rightarrow \infty$   
 $\gamma_1 \rightarrow \gamma_0 + \gamma_1$ . Ces deux quantités dépendent de  $\psi$  (ou  $x$ )

## Application a la quintique

- Soit la **quintique** :  $\sum_{i=0}^4 x_i^5 - \psi x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$ . Comme pour les courbes elliptiques, Morisson a montré en se plaçant au voisinage de  $x = (\frac{1}{\psi})^{-5} = 0$  que l'on pouvait retrouver  $t$  (déformation coté kähler) à partir de  $\psi$  (ou  $x$ ).
- Comme pour les courbes elliptiques,  $t = \frac{\int_{\gamma_1} \Omega}{\int_{\gamma_0} \Omega}$ , il faut donc calculer les périodes  $\phi_i(x) = \int_{\gamma_i} \Omega$ ,  $i = 1, 2$ .  $\gamma_0$  est invariant par monodromie autour de  $x = 0$ , (**large complex structure limit (LCSL)**),  $\psi \rightarrow \infty$   $\gamma_1 \rightarrow \gamma_0 + \gamma_1$ . Ces deux quantités dépendent de  $\psi$  (ou  $x$ )
- On peut calculer localement la trois forme (\*)  $\Omega$  en utilisant une version "forme différentielle" du **théorème des résidus**, (et le théorème des **fonctions implicites**) et en déduire par un **calcul directe**, la première période.

## Application a la quintique

- Soit la **quintique** :  $\sum_{i=0}^4 x_i^5 - \psi x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$ . Comme pour les courbes elliptiques, Morisson a montré en se plaçant au voisinage de  $x = (\frac{1}{\psi})^{-5} = 0$  que l'on pouvait retrouver  $t$  (déformation coté kähler) à partir de  $\psi$  (ou  $x$ ).
- Comme pour les courbes elliptiques,  $t = \frac{\int_{\gamma_1} \Omega}{\int_{\gamma_0} \Omega}$ , il faut donc calculer les périodes  $\phi_i(x) = \int_{\gamma_i} \Omega$ ,  $i = 1, 2$ .  $\gamma_0$  est invariant par monodromie autour de  $x = 0$ , (**large complex structure limit (LCSL)**),  $\psi \rightarrow \infty$   $\gamma_1 \rightarrow \gamma_0 + \gamma_1$ . Ces deux quantités dépendent de  $\psi$  (ou  $x$ )
- On peut calculer localement la trois forme (\*)  $\Omega$  en utilisant une version "forme différentielle" du **théorème des résidus**, (et le théorème des **fonctions implicites**) et en déduire par un **calcul directe**, la première période.
- L'équation dite de **Picard Fuchs** permet de calculer l'autre période.

## Application a la quintique

- Soit la **quintique** :  $\sum_{i=0}^4 x_i^5 - \psi x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$ . Comme pour les courbes elliptiques, Morisson a montré en se plaçant au voisinage de  $x = (\frac{1}{\psi})^{-5} = 0$  que l'on pouvait retrouver  $t$  (déformation coté kähler) à partir de  $\psi$  (ou  $x$ ).

- Comme pour les courbes elliptiques,  $t = \frac{\int_{\gamma_1} \Omega}{\int_{\gamma_0} \Omega}$ , il faut donc calculer les périodes  $\phi_i(x) = \int_{\gamma_i} \Omega$ ,  $i = 1, 2$ .  $\gamma_0$  est invariant par monodromie autour de  $x = 0$ , (**large complex structure limit (LCSL)**),  $\psi \rightarrow \infty$   
 $\gamma_1 \rightarrow \gamma_0 + \gamma_1$ . Ces deux quantités dépendent de  $\psi$  (ou  $x$ )

- On peut calculer localement la trois forme (\*)  $\Omega$  en utilisant une version "forme différentielle" du **théorème des résidus**, (et le théorème des **fonctions implicites**) et en déduire par un **calcul directe**, la première période.
- L'équation dite de **Picard Fuchs** permet de calculer l'autre période.
- finalement, on trouve :

$$\phi_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n!}{(n!)^5} x^n,$$

$$\phi_1(x) = \phi_0(x) \log(x) + f(x), \text{ avec } f(x) = 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n!}{(n!)^5} \left( \sum_{j=n+1}^{5n} \frac{1}{j} \right) x^n$$

## Calcul des couplages de Yukawa coté $B$

- Posons  $\Theta^{(i)} = (x \frac{d}{dx})^{(i)}$ , l'équation de Picard-Fuch s'écrit :  
$$\Theta^{(4)}y + \frac{2.5^5x}{1+5^5x}\Theta^{(3)}y + \frac{7.5^4x}{1+5^5x}\Theta^{(2)}y + \frac{2.5^4x}{1+5^5x}\Theta^{(1)}y + \frac{2.5^5x}{1+5^5x}\Theta y = 0$$
  
On l'applique a  $\Omega$  :



## Calcul des couplages de Yukawa coté $B$

- Posons  $\Theta^{(i)} = (x \frac{d}{dx})^{(i)}$ , l'équation de Picard-Fuch s'écrit :  
$$\Theta^{(4)}y + \frac{2.5^5x}{1+5^5x}\Theta^{(3)}y + \frac{7.5^4x}{1+5^5x}\Theta^{(2)}y + \frac{2.5^4x}{1+5^5x}\Theta^{(1)}y + \frac{2.5^5x}{1+5^5x}\Theta y = 0$$
  
On l'applique a  $\Omega$  :
- Si  $Y = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega^{(3)}$ ,  $\int_{MX} \Omega \wedge \Omega = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega' = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega'' = 0$ ,  
En dérivant deux fois la dernière égalité il vient :  
$$\int_{MX} \Omega \wedge \Omega^{(4)} + 2 \int_{MX} \Omega' \wedge \Omega^{(3)} = 0$$

## Calcul des couplages de Yukawa coté $B$

- Posons  $\Theta^{(i)} = (x \frac{d}{dx})^{(i)}$ , l'équation de Picard-Fuch s'écrit :  
$$\Theta^{(4)}y + \frac{2.5^5x}{1+5^5x}\Theta^{(3)}y + \frac{7.5^4x}{1+5^5x}\Theta^{(2)}y + \frac{2.5^4x}{1+5^5x}\Theta^{(1)}y + \frac{2.5^5x}{1+5^5x}\Theta y = 0$$
  
On l'applique a  $\Omega$  :
- Si  $Y = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega^{(3)}$ ,  $\int_{MX} \Omega \wedge \Omega = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega' = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega'' = 0$ ,  
En dérivant deux fois la dernière égalité il vient :  
$$\int_{MX} \Omega \wedge \Omega^{(4)} + 2 \int_{MX} \Omega' \wedge \Omega^{(3)} = 0$$
- On en déduit l'équation différentielle :  $(x \frac{d}{dx})Y = \frac{-5^5x}{1+5^5x}Y$

## Calcul des couplages de Yukawa coté $B$

- Posons  $\Theta^{(i)} = (x \frac{d}{dx})^{(i)}$ , l'équation de Picard-Fuch s'écrit :  
$$\Theta^{(4)}y + \frac{2.5^5x}{1+5^5x}\Theta^{(3)}y + \frac{7.5^4x}{1+5^5x}\Theta^{(2)}y + \frac{2.5^4x}{1+5^5x}\Theta^{(1)}y + \frac{2.5^5x}{1+5^5x}\Theta y = 0$$
  
On l'applique a  $\Omega$  :
- Si  $Y = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega^{(3)}$ ,  $\int_{MX} \Omega \wedge \Omega = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega' = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega'' = 0$ ,  
En dérivant deux fois la dernière égalité il vient :  
$$\int_{MX} \Omega \wedge \Omega^{(4)} + 2 \int_{MX} \Omega' \wedge \Omega^{(3)} = 0$$
- On en déduit l'équation différentielle :  $(x \frac{d}{dx})Y = \frac{-5^5x}{1+5^5x}Y$
- La solution est donc  $Y = \langle x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx} \rangle = \frac{c_2}{1+5^5x}$

## Calcul des couplages de Yukawa coté $B$

- Posons  $\Theta^{(i)} = (x \frac{d}{dx})^{(i)}$ , l'équation de Picard-Fuch s'écrit :  
$$\Theta^{(4)}y + \frac{2.5^5x}{1+5^5x} \Theta^{(3)}y + \frac{7.5^4x}{1+5^5x} \Theta^{(2)}y + \frac{2.5^4x}{1+5^5x} \Theta^{(1)}y + \frac{2.5^5x}{1+5^5x} \Theta y = 0$$
  
On l'applique a  $\Omega$  :
- Si  $Y = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega^{(3)}$ ,  $\int_{MX} \Omega \wedge \Omega = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega' = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega'' = 0$ ,  
En dérivant deux fois la dernière égalité il vient :  
$$\int_{MX} \Omega \wedge \Omega^{(4)} + 2 \int_{MX} \Omega' \wedge \Omega^{(3)} = 0$$
- On en déduit l'équation différentielle :  $(x \frac{d}{dx})Y = \frac{-5^5x}{1+5^5x} Y$
- La solution est donc  $Y = \langle x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx} \rangle = \frac{c_2}{1+5^5x}$
- On doit normaliser  $Y$  en accord avec (\*) et diviser donc  $\Omega$  par :  $\phi_0(x)$   
Ainsi :  
$$\langle x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx} \rangle = \frac{c_2}{(1+5^5x)\phi_0(x)^2}$$

## Calcul des couplages de Yukawa coté $B$

- Posons  $\Theta^{(i)} = (x \frac{d}{dx})^{(i)}$ , l'équation de Picard-Fuch s'écrit :  
$$\Theta^{(4)}y + \frac{2.5^5x}{1+5^5x}\Theta^{(3)}y + \frac{7.5^4x}{1+5^5x}\Theta^{(2)}y + \frac{2.5^4x}{1+5^5x}\Theta^{(1)}y + \frac{2.5^5x}{1+5^5x}\Theta y = 0$$
  
On l'applique a  $\Omega$  :
- Si  $Y = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega^{(3)}$ ,  $\int_{MX} \Omega \wedge \Omega = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega' = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega'' = 0$ ,  
En dérivant deux fois la dernière égalité il vient :  
$$\int_{MX} \Omega \wedge \Omega^{(4)} + 2 \int_{MX} \Omega' \wedge \Omega^{(3)} = 0$$
- On en déduit l'équation différentielle :  $(x \frac{d}{dx})Y = \frac{-5^5x}{1+5^5x}Y$
- La solution est donc  $Y = \langle x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx} \rangle = \frac{c_2}{1+5^5x}$
- On doit normaliser  $Y$  en accord avec (\*) et diviser donc  $\Omega$  par :  $\phi_0(x)$   
Ainsi :  
$$\langle x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx} \rangle = \frac{c_2}{(1+5^5x)\phi_0(x)^2}$$
- Par identification,  
$$\langle H, H, H \rangle = (2\pi i \frac{q}{x} \frac{dx}{dq})^3 \langle x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx} \rangle = \frac{c_2(2\pi i \frac{q}{x} \frac{dx}{dq})^3}{(1+5^5x)\phi_0(x)^2}$$

## V Conclusions : Application à la géométrie énumérative

- Le paramètre  $t$  de déformation kählérienne, s'exprime en fonction du ratio des deux premières périodes, il vient :  $q = e^{2i\pi \frac{\phi_1(x)}{\phi_0(x)}}$  d'où :  
 $q = c_1(x - 770x^2 + \dots)$  et inversement  $x = \frac{q}{c_1} + 770(\frac{q}{c_1})^2 + \dots$

## V Conclusions : Application à la géométrie énumérative

- Le paramètre  $t$  de déformation kählérienne, s'exprime en fonction du ratio des deux premières périodes, il vient :  $q = e^{2i\pi \frac{\phi_1(x)}{\phi_0(x)}}$  d'où :  
 $q = c_1(x - 770x^2 + \dots)$  et inversement  $x = \frac{q}{c_1} + 770(\frac{q}{c_1})^2 + \dots$
- On peut maintenant tout calculer en fonction de la variable  $q$  :  
 $\langle H, H, H \rangle = (2\pi i)^3(-c_2 - 575(\frac{c_2}{c_1})q - 19575(\frac{c_2^2}{c_1^2})q^2 + \dots)$  Il reste à calculer les constantes  $c_1$  et  $c_2$ .

## V Conclusions : Application à la géométrie énumérative

- Le paramètre  $t$  de déformation kählérienne, s'exprime en fonction du ratio des deux premières périodes, il vient :  $q = e^{2i\pi \frac{\phi_1(x)}{\phi_0(x)}}$  d'où :  
 $q = c_1(x - 770x^2 + \dots)$  et inversement  $x = \frac{q}{c_1} + 770(\frac{q}{c_1})^2 + \dots$
- On peut maintenant tout calculer en fonction de la variable  $q$  :  
 $\langle H, H, H \rangle = (2\pi i)^3(-c_2 - 575(\frac{c_2}{c_1})q - 19575(\frac{c_2^2}{c_1^2})q^2 + \dots)$  Il reste à calculer les constantes  $c_1$  et  $c_2$ .
- On se rappelle que l'on ne savait pas dénombrer les courbes rationnelles de degré  $n_d$ , on le sait pour les premiers degrés ce qui permet de calculer  $c_1$  et  $c_2$ .

$$\langle H, H, H \rangle = 5 + \sum_{d=1}^{\infty} n_d d^3 \frac{q^d}{1-q^d} = 5 + 2875q + \dots$$

$$\text{On en déduit } c_2 = \frac{-5}{(2\pi i)^3}, c_1 = -1$$



## V Conclusions : Application à la géométrie énumérative

- Le paramètre  $t$  de déformation kählérienne, s'exprime en fonction du ratio des deux premières périodes, il vient :  $q = e^{2i\pi \frac{\phi_1(x)}{\phi_0(x)}}$  d'où :  
 $q = c_1(x - 770x^2 + \dots)$  et inversement  $x = \frac{q}{c_1} + 770(\frac{q}{c_1})^2 + \dots$
- On peut maintenant tout calculer en fonction de la variable  $q$  :  
 $\langle H, H, H \rangle = (2\pi i)^3(-c_2 - 575(\frac{c_2}{c_1})q - 19575(\frac{c_2^2}{c_1^2})q^2 + \dots)$  Il reste à calculer les constantes  $c_1$  et  $c_2$ .
- On se rappelle que l'on ne savait pas dénombrer les courbes rationnelles de degré  $n_d$ , on le sait pour les premiers degrés ce qui permet de calculer  $c_1$  et  $c_2$ .  
 $\langle H, H, H \rangle = 5 + \sum_{d=1}^{\infty} n_d d^3 \frac{q^d}{1-q^d} = 5 + 2875q + \dots$   
On en déduit  $c_2 = \frac{-5}{(2\pi i)^3}$ ,  $c_1 = -1$
- finalement on peut énumérer le **nombre de courbe rationnelles d'une quintique** de  $\mathbb{P}^4$  de tout degrés :

## V Conclusions : Application à la géométrie énumérative

- Le paramètre  $t$  de déformation kählérienne, s'exprime en fonction du ratio des deux premières périodes, il vient :  $q = e^{2i\pi \frac{\phi_1(x)}{\phi_0(x)}}$  d'où :  $q = c_1(x - 770x^2 + \dots)$  et inversement  $x = \frac{q}{c_1} + 770(\frac{q}{c_1})^2 + \dots$
- On peut maintenant tout calculer en fonction de la variable  $q$  :  $\langle H, H, H \rangle = (2\pi i)^3(-c_2 - 575(\frac{c_2}{c_1})q - 19575(\frac{c_2}{c_1})q^2 + \dots)$  Il reste à calculer les constantes  $c_1$  et  $c_2$ .

- On se rappelle que l'on ne savait pas dénombrer les courbes rationnelles de degré  $n_d$ , on le sait pour les premiers degrés ce qui permet de calculer  $c_1$  et  $c_2$ .



$$\langle H, H, H \rangle = 5 + \sum_{d=1}^{\infty} n_d d^3 \frac{q^d}{1-q^d} = 5 + 2875q + \dots$$

$$\text{On en déduit } c_2 = \frac{-5}{(2\pi i)^3}, c_1 = -1$$

- finalement on peut énumérer le **nombre de courbe rationnelles d'une quintique** de  $\mathbb{P}^4$  de tout degrés :

$$\langle H, H, H \rangle = 5 + \sum_{d=1}^{\infty} n_d \frac{d^3 q^d}{1-q^d} = \mathbf{5 + 2875 \frac{q}{1-q} + 609250.2^3 \frac{q^2}{1-q^2} + \dots}$$

## VII) Références

-  D.R.Morrisson Mirror symmetry and rational curves on quintic threefolds : A guide for mathematicians, journal of the american mathematical society, vol. 6, number 1, jauary 1993.
-  K.Hori, S. Katz, A. Klem, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, E. Zaslow, *Mirror symmetry*, AMS, 2003. Press.