

Seminaire d'analyse de Caen
La Géométrie des cordes, les modèles A et B de
Witten
Exposé II : Le modèle B et la symétrie miroir

Ph Durand

juin 2011

1 Introduction

La *symétrie miroir* postule qu'il existe deux points de vues pour se représenter la physique des cordes fermioniques. La pertinence provient du fait que certains problèmes non résolubles d'un certain point de vue le sont par l'autre. La symétrie miroir est la forme très aboutie de la *T -dualité* apparue en théorie bosoniques qui affirme que la fonction de partition reste inchangée dans le changement $R \leftrightarrow \frac{1}{R}$, R désignant le rayon de compactification d'une dimension supplémentaire. Dans une théorie de champs bosonique, où l'espace source est le cylindre et le but un tore on peut remarquer que La *T -dualité* échange déformation de structure symplectique (Aire) et déformation de structure complexe. Dans ce "survey", nous allons présenter des outils provenant de la physique et des mathématiques permettant de comprendre certains aspects de la symétrie miroir. En particulier nous construiront l'application miroir localement telle qu'historiquement Morrison l'a présentée pour la théorie des cordes fermées. Et nous expliquerons brièvement les retombées en géométrie énumérative.

2 Modèle de Landau Ginzburg et variétés complexes

Du A -side du miroir de Witten, Les fonctions de corrélations ont été calculées à partir des instantons : courbes holomorphes dans le cadre sym-

plectique, dans ce contexte, elles vont être calculées à partir des outils de la géométrie complexe ; Le point de départ est la physique statistique et l'école russe d'Arnold et sa théorie des singularité.

2.1 Théorie φ^4 et Géométrie complexe

Le modèle de **Landau Ginzburg** joue un rôle décisif de ce coté du miroir, ou l'on va s'intéresser à des déformations admissibles (perturbations marginales) préservant certaines symétries. On part du lagrangien en φ^4 : $\mathcal{L}_{LG} = \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - V(T, \phi)$ où $V(T, \phi) = \frac{1}{4!} \lambda(t) \phi^4 + \frac{1}{2!} \mu^2(t) \phi^2$ A la température critique T_c , "la masse", $\mu^2(T_c) = 0$, donc la longueur de corrélation (inverse de la masse) est infinie. A cette température le champ ϕ_0 solution de $\frac{\partial}{\partial \phi} V(T, \phi)$ est zero trois fois dégénéré. Une petite perturbation $V(T_c, \phi) \rightarrow V(T_c, \phi) + \delta \mu^2(T) \phi^2$, **résoud** la singularité et par ce fait **"brise la symétrie"**. Le challenge est de trouver le moyen de perturber **marginalement** une théorie de potentiel de manière à préserver la symétrie : et définir par le fait une famille critique de superpotentiels.

2.2 Théorie des singularités, déformations marginales

Le superpotentiel est une fonction holomorphe $\mathcal{W} : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}$, on choisit un potentiel sous la forme $V(x) = \sum_1^N |\partial_i \mathcal{W}(X)|^2 = \sum_1^N \partial_i \mathcal{W}(X) \partial_i \mathcal{W}(X)^*$ Si et on ne considère qu'un seul champ, on peut considérer la fonction : $\mathcal{W}(X) = \frac{1}{(n+1)!} X^{n+1}$ La partie bosonique du lagrangien supersymétrique s'écrit alors : $\mathcal{L}_{N=2}^{LG} = -\partial_+ X^* \partial_- X + \partial_- X^* \partial_+ X + V(X)$

On a : $V(X) = 0 \Leftrightarrow \partial_i \mathcal{W}(X_0) = 0$, ainsi il est pertinent de définir l'**anneau**

Chiral $\mathcal{R}_{\mathcal{W}} = \frac{\mathbb{C}[X]}{\partial \mathcal{W}(X)}$ où le quotient va pour les polynômes proportionnels

à $\partial_i \mathcal{W}(X) : P(X) = P^i(X) \partial_i \mathcal{W}(X)$ les déformations respectant l'anneau Chiral sont données par : $\mathcal{W}_{def}(X) = \mathcal{W}(X) + \sum_{P \in \mathcal{R}_{\mathcal{W}}} t_P P(X)$

Si on choisit $\mathcal{W}(X, Y, Z) = \frac{1}{3}(X^3 + Y^3 + Z^3)$, le potentiel déformé est donné par : $\mathcal{W}_{def}(X, Y, Z) = \mathcal{W}(X, Y, Z) + t_0 + t_1 X + t_2 Y + t_3 Z + t_4 XY + t_5 YZ + t_6 ZX + t_7 XYZ$ Seule la non nullité de $\mu = t_7$ préserve le caractère critique, il ne brise pas non plus la \mathbb{Z}_3 symmetrie

$(X, Y, Z) \rightarrow (\exp(\frac{2ki\pi}{3})X, \exp(\frac{2ki\pi}{3})Y, \exp(\frac{2ki\pi}{3})Z)$

on vient de définir une famille **continue** de perturbations **permises** :

$$\mathcal{W}_{def}(X, Y, Z, \mu) = \frac{1}{3}(X^3 + Y^3 + Z^3) + \mu XYZ$$

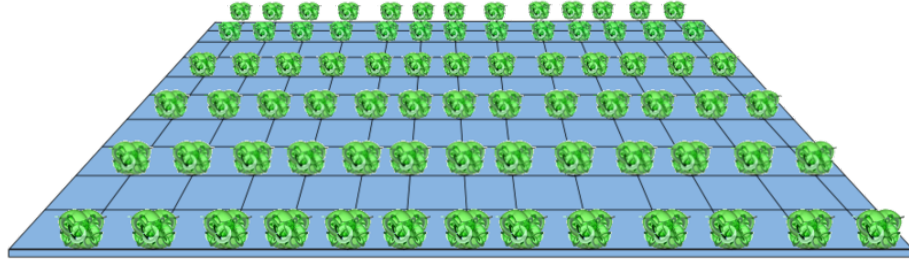


FIGURE 1 – Variétés de Calabi Yau

3 Variétés de Calabi-Yau, Théorie de la déformation

L'hypersurface d'un espace projectif complexe obtenue en annulant $\mathcal{W}_{def}(X, Y, Z, \mu) = \frac{1}{3}(X^3 + Y^3 + Z^3) + \mu XYZ$ est l'exemple le plus simple de variété de Calabi-Yau, c'est une courbe elliptique, ou tore complexe. Une variété de **Calabi-Yau** est une variété Kählérienne Ricci plate ce qui revient à dire que le fibré canonique est trivial. Il y a entre autre les surfaces K3 qui interviennent en théorie des branes, et les quintiques threefolds pour les cordes fermées. Le moyen le plus simple de réaliser des variétés de Calabi-Yau est de considerer une *hypersurface d'un espace projectif complexe*. Il existe une contrainte forte entre le degré d'une hypersurface et la dimension de l'espace ambiant.

3.1 Exemple de variétés de Calabi-Yau

Ecrivons la suite exacte associée à une hypersurface de degré d :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(-d) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

Avec la suite exacte longue en cohomologie, on peut calculer les groupes de cohomologies associés

Le Resultat : $H^n(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}^{C_{n-1}^{d-1}} = \mathbb{C}$ (*Condition de Calabi-Yau*)

Donc nécessairement $d = n + 2$

- $n = 1$ ($d=3$) : *Courbes elliptiques*
- $n = 2$ ($d=4$) : *Surfaces K3*
- $n = 3$ ($d=5$) : *Quintic threefold*

3.2 Déformations, symétrie miroir

On va s'intéresser à deux types de *déformations* des variétés de Calabi-Yau : les déformations de sa structure symplectique et celles provenant de sa structure complexe. On peut envisager la déformation de la structure complexe (*déformation de J*). Elle est captée par $H^1(X, TX) \simeq H^{2,1}(X)$, On peut aussi faire varier la structure Kählérienne, repérée par $H^{1,1}(X) = H^1(X, \Omega_X^1)$ On a deux théories de champs (**CFT**) supersymétriques, en dualité satisfaisant : $h^{2,1}(X) = h^{1,1}(MX)$ et $h^{1,1}(X) = h^{2,1}(MX)$: déformer la structure complexe de M revient à déformer le volume de son miroir.

le diamant de Hodge représente graphiquement les nombres de Hodge d'une variété complexe

Diamant d'une variété de Calabi-Yau (Quintic Threefold)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & h^{0,0} = 1 & & \\
 & & & & h^{1,0} = 0 & & h^{0,1} = 0 \\
 & & h^{2,0} = 0 & & \underline{h^{1,1} = 1} & & h^{0,2} = 0 \\
 h^{3,0} = 1 & & & \underline{h^{2,1} = 101} & & h^{1,2} = 101 & & h^{0,3} = 1 \\
 & & h^{2,0} = 0 & & h^{1,1} = 1 & & h^{0,2} = 0 \\
 & & & & h^{1,0} = 0 & & h^{0,1} = 0 \\
 & & & & & & h^{0,0} = 1
 \end{array}$$

3.3 "B side" Origine Physique

Du côté A, les contraintes supersymétriques conduisent à ce que l'action ne *dépende que de la forme de Kähler* ; les instantons sont les courbes holomorphes. Le calcul des fonctions de corrélations est difficile car il tient compte de la correction sur le degré des courbes (*invariants de Gromov-Witten*) du côté "B", Le formalisme BRST expliqué du côté A du miroir s'applique : ici Les instantons sont les applications constantes du world-sheet Σ sur un point de l'espace X. Les fonctions de corrélations sont plus simples à calculer : elles nécessitent pas de *correction instanton*.

Si X est une variété de Calabi-Yau de dimension 3, la fonction de corrélation à 3 points est :

$$\langle W_A W_B W_C \rangle = \int_X \Omega^{jkl} A_j \wedge B_k \wedge C_l \wedge \Omega$$

A, B, C appartiennent à $H^1(X, TX)$ et *dépendent de la structure complexe*, Ω est la (3,0) top-forme *holomorphe*. Les deux nombres $h^{1,1}(X)=1$ et $h^{2,1}(X) = 101$, comptent le nombre de déformations respectivement des structures kählérienne et complexes. Le principe de symétrie miroir, donne $h^{1,1}(MX)=101$ et $h^{2,1}(MX) = 1$. Il dit en plus que les *fonctions de corrélations* calculées des deux cotés du miroir sont *identiques*. L'application

miroir (*Mirror map*) associe au paramètre de déformation de structure kählérienne le paramètre de déformation de structure complexe. Si un problème est difficile du côté A , on peut tenter de le résoudre du côté B , **En mathématique** le passage par l'application miroir permet de résoudre de *manière crucial* de vieux problème de *géométrie énumérative*

4 Le Quintic et son miroir

On rappelle que la *quintique homogène* de \mathbb{P}^4 , est obtenue en annulant le superpotentiel : $\mathcal{W} = \frac{1}{5}(X_0^5 + \dots + X_4^5)$
 Une *déformation marginale* de ce superpotentiel est *presque* la variété miroir recherchée la *variété miroir* associé à cette quintique est *une crepant résolution* de :

$$\{(X_0, \dots, X_4) \in \mathbb{P}^4 / \frac{1}{5}(X_0^5 + \dots + X_4^5) - \mu X_0 \dots X_4 = 0\} / G$$

avec $G = \{(a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{Z}/5 / \sum a_i = 0\} / \mathbb{Z}/5 = \{(a, a, a, a, a)\} \simeq (\mathbb{Z}/5)^3$

4.1 Programme a suivre

localisation La construction globale de l'*application miroir* est difficile. Il faut localiser et la construire au *voisinage d'un point*.

Plan d'étude

On note X la variété de Calabi-Yau, MX son miroir.

- On doit d'abord calculer les **couplage de Yukawa** de $H^1(MX, TMX)$
- Identifier par l'application miroir.
- En déduire les couplages de Yukawa de $H^{1,1}(X)$

On peut en déduire des prédictions sur le nombre de courbes rationnelles dans X On va décrire dans la suite sommairement *la mathématique utile* pour le B -side du quintic.

4.2 Mirror-map

Le principe de symétrie miroir dit que $\langle H, H, H \rangle = \langle \theta, \theta, \theta \rangle$, si tH désigne une *courbe à un paramètre* dans le module de kähler de X , on pose $H = \frac{d}{dt} = 2\pi i q \frac{d}{dq}$ son vecteur tangent ($q = \exp(2\pi i t)$) coordonnées locale dans ce module.

Le problème est de fabriquer une image $q(x)$ dans le *module de déformations complexes*. on a : $q = q(x), \frac{d}{dq} \rightarrow \frac{dx}{dq} \frac{d}{dx}$

Alors on peut écrire $H = 2\pi i q \frac{d}{dq} \leftrightarrow \theta = 2\pi i q \frac{dx}{dq} \frac{d}{dx}$
 $\langle H, H, H \rangle = (2\pi i q \frac{d}{dq})^3 \langle \frac{d}{dx}, \frac{d}{dx}, \frac{d}{dx} \rangle = (2\pi i \frac{q}{x} \frac{dx}{dq})^3 \langle x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx} \rangle$
 la partie droite du dernier terme est : $\langle \theta, \theta, \theta \rangle$

4.3 Outils mathématiques

Les exemples les plus simples de variétés de Calabi-Yau sont les courbes elliptiques. Elles vont nous servir de guide pour comprendre les techniques définies ci dessous et définir l'application miroir. **Monodromie** : Pour un fibré plat, contourner un objet singulier en $t = 0$ à distance constante t (paramètre de déformation d'une famille lisse) se nomme en mathématiques **monodromie**. En physique on parle de **boucle de Wilson**. **Residue map** : On peut généraliser la formule des résidues d'une fonction de variables complexes autour de $z = 0$ en remplaçant fonction par **formes différentielle** et point par **hypersurface**. Cela sera très utile pour calculer des périodes.

4.4 Courbes elliptiques

La **courbe elliptique** $E_\tau = \mathbb{C}/(1, \tau)$ est une variété de Calabi-Yau de **dimension** 1.

La forme volume est donnée par $\Omega = dz$

Nombres de Hodge : le diamant de Hodge est :

$$\begin{array}{ccccc} & & h_{00} & & 1 \\ & h_{10} & & h_{01} & = & 1 & & 1 \\ & & h_{11} & & 1 \end{array}$$

La famille à un paramètre de déformations d'une courbe elliptique est :
 $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3\psi XYZ = 0$

Si α et β sont des **cycles d'homologie**, ils dépendent alors de ψ , on peut retrouver τ à partir du **rapport des périodes** : $\int_\alpha \Omega, \int_\beta \Omega$.

En résolvant une **équation différentielle** dite **de Picard-Fuchs**

4.5 Famille de courbes elliptiques, monodromie

Dégénération d'une famille de courbes

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{X} & \supset & X_t & t \neq t' & X_t \simeq X_{t'} \\ \pi \downarrow & & \downarrow & & \\ D^2 & \ni & t & t = 0 & X_0 : \text{sing.} \end{array}$$

Théorème de monodromie : Soit, X_t où t varie le long d'une boucle

dans $\pi_1(D^2 - \{0\}, t_0)$ autour de 0, (*boucle de Wilson*), tous les éléments de cette famille sont *difféomorphes*. Cela induit un automorphisme en homologie : $\varphi_* \in \text{Aut}(H_n(X_{t_0}), \mathbb{Z})$ Exemple d'application On va l'illustrer en prenant une famille à un paramètre de *courbe elliptique* $C_t = \{(Y^2Z = X^3 + X^2Z - tZ^3) \subset \mathbb{CP}^2$ qui s'exprime en coordonnées affines par : $C_t : y^2 = x^3 + x^2 - t$: courbe elliptique définie par une équation algébrique.

Le paramètre t de cette *courbe elliptique* est la signature de la variation de structure complexe ; l'expression géométrique est $E_\tau = \mathbb{C}/(1, \tau(t))$ quand t tourne autour de l'origine $\tau(t) \rightarrow \tau(t) + 1$, avec τ fonction de t : $\tau(t) = \frac{\text{Int}}{2\pi i}$

Au niveaux du groupe d'automorphisme : $\begin{pmatrix} \tau(t) & \\ & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(t) & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) + 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

On retrouve le fait que la structure complexe varie mais que la structure symplectique est inchangée.

On justifie le choix de la nouvelle coordonnée $q(t) = e^{2\pi i \tau(t)}$, un passage à la limite donne : quand $t \rightarrow 0$, $\text{Im}\tau(t) \rightarrow +\infty$, d'où $q(t)$, est une fonction holomorphe de t qui tend aussi vers 0 ; c'est donc une coordonnée locale pour cette famille de courbes elliptiques. On parle en physique de : *large complex structure limit (LCSL)* en "bijection" avec *large volume limit (LVL)* du coté A

4.6 Application à la quintique

Soit la *quintique* : $\sum_{i=0}^4 x_i^5 - \psi x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$. Comme pour les courbes elliptiques, Morisson a montré en se plaçant au voisinage de $x = (\frac{1}{\psi})^{-5} = 0$ que l'on pouvait retrouver t (déformation coté kähler) à partir de ψ (ou x).

Comme pour les courbes elliptiques, $t = \frac{\int_{\gamma_1} \Omega}{\int_{\gamma_0} \Omega}$, il faut donc calculer les périodes $\phi_i(x) = \int_{\gamma_i} \Omega$, $i = 1, 2$. γ_0 est invariant par monodromie autour de $x = 0$, (*large complex structure limit (LCSL)*), $\psi \rightarrow \infty \gamma_1 \rightarrow \gamma_0 + \gamma_1$. Ces deux quantités dépendent de ψ (ou x)

On peut calculer localement la trois forme (*) Ω en utilisant une version "forme différentielle" du *théorème des résidus*, (et le théorème des *fonctions implicites*) et en déduire par un *calcul directe*, la première période. L'équation dite de *Picard Fuchs* permet de calculer l'autre période. Finalement, on trouve :

$$\phi_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n!}{(n!)^5} x^n,$$

$$\phi_1(x) = \phi_0(x) \log(x) + f(x), \text{ avec } f(x) = 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n!}{(n!)^5} \left(\sum_{j=n+1}^{5n} \frac{1}{j} \right) x^n$$

4.7 Calcul des couplages de Yukawa coté B

Posons $\Theta^{(i)} = (x \frac{d}{dx})^{(i)}$, l'équation de Picard-Fuch s'écrit :

$$\Theta^{(4)}y + \frac{2.5^5x}{1+5^5x} \Theta^{(3)}y + \frac{7.5^4x}{1+5^5x} \Theta^{(2)}y + \frac{2.5^4x}{1+5^5x} \Theta^{(1)}y + \frac{2.5^5x}{1+5^5x} \Theta y = 0$$

On l'applique a Ω : Si $Y = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega^{(3)}$, $\int_{MX} \Omega \wedge \Omega = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega' = \int_{MX} \Omega \wedge \Omega'' = 0$, En dérivant deux fois la dernière égalité il vient : $\int_{MX} \Omega \wedge \Omega^{(4)} + 2 \int_{MX} \Omega' \wedge \Omega^{(3)} = 0$

On en déduit l'équation différentielle : $(x \frac{d}{dx})Y = \frac{-5^5x}{1+5^5x}Y$

La solution est donc $Y = \langle x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx} \rangle = \frac{c_2}{1+5^5x}$

On doit normaliser Y en accord avec (*) et diviser donc Ω par : $\phi_0(x)$ Ainsi :

$$\langle x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx} \rangle = \frac{c_2}{(1+5^5x)\phi_0(x)^2} \text{ Par identification,}$$

$$\langle H, H, H \rangle = (2\pi i \frac{q}{x} \frac{dx}{dq})^3 \langle x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx} \rangle = \frac{c_2 (2\pi i \frac{q}{x} \frac{dx}{dq})^3}{(1+5^5x)\phi_0(x)^2}$$

5 Conclusions : Application à la géométrie énumérative

Le paramètre t de déformation kählérienne, s'exprime en fonction du ratio des deux premières périodes, il vient :

$$q = e^{2i\pi \frac{\phi_1(x)}{\phi_0(x)}} \text{ d'où :}$$

$$q = c_1(x - 770x^2 + \dots) \text{ et inversement } x = \frac{q}{c_1} + 770(\frac{q}{c_1})^2 + \dots$$

On peut maintenant tout calculer en fonction de la variable q :

$$\langle H, H, H \rangle = (2\pi i)^3 (-c_2 - 575(\frac{c_2}{c_1})q - 19575(\frac{c_2}{c_1})q^2 + \dots)$$

Il reste a calculer les constantes c_1 et c_2 .

On se rappelle que l'on ne savait pas dénombrer les courbes rationnelles de degré n_d , on le sait pour les premiers degrés ce qui permet de calculer c_1 et c_2 .

$$\langle H, H, H \rangle = 5 + \sum_{d=1}^{\infty} n_d d^3 \frac{q^d}{1-q^d} = 5 + 2875q + \dots$$

On en déduit $c_2 = \frac{-5}{(2\pi i)^3}$, $c_1 = -1$ Enfin on peut énumérer le **nombre de courbe rationnelles d'une quintique** de \mathbb{P}^4 de tout degrés :

$$\langle H, H, H \rangle = 5 + \sum_{d=1}^{\infty} n_d \frac{d^3 q^d}{1-q^d} = \mathbf{5} + \mathbf{2875} \frac{q}{1-q} + \mathbf{609250.2^3} \frac{q^2}{1-q^2} + \dots$$

Références

- [1] D.R.Morrisson Mirror symmetry and rational curves on quintic three-folds : A guide for mathematicians, journal of the american mathematical society, vol. 6, number 1, jbruary 1993.
- [2] K.Hori, S. Katz, A. Klem, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, E. Zaslow, *Mirror symmetry*, AMS, 2003. Press.