Séminaire d'analyse de Caen
Invariants en géometrie et physique : cas des invariants de Seiberg et Witten

Philippe Durand, CNAM Paris

Janvier 2008

1 Introduction

Les invariants topologiques, qui permettent la classification des variétés de dimension deux, sont bien connus. Ils datent du début du siècle dernier. C'est à Henri Poincaré que l'on doit l'invention des nombres de Betti qui raffinent un invariant connu d'Euler (au moins pour les courbes et les graphes), cet invariant global est la caractristique d'Euler-Poincaré. En dimension 4, la classification des variétés topologiques provient de la connaissance de la forme quadratique d'intersection. Des progrès importants obtenus dans les années quatre-vingt, ont affiné la classification topologique des variétés de dimension 4, la classification débouche dans la catégorie différentiable. La fusion d'idées venant de la physique, théorie de jauge SU(2) et des outils de géométrie différentielle, ont permis à Donaldson de définir de nouveaux invariants à partir de polynômes (Polynômes de Donaldson). Plus récemment, Seiberg et Witten ont introduit de nouveaux invariants issus cette fois de la théorie de jauge U(1) (électromagnétisme). Ces invariants sont plus difficiles à définir mais sont "plus calculables" que ceux de Donaldson. Les méthodes pour définir ces invariants reposent toutes sur le même principe: la définition d'un espace de modules formé de paramètres à mesurer et contrôler les déformations. Alors, intervient la recherche d'invariants dans cet espace qui peut être, dans les bons cas, une variété mais qui comporte, en général, des singularités. En général, l'espace de module n'est pas compact, mais peut être compactifié. On peut le linéariser, localement, ce qui permet de calculer sa dimension (celle de son espace tangent) et d'en extraire des invariants.

2 Bref historique sur les invariants

En basses dimensions, jusqu'à trois, on peut montrer que la classification topologique suffit car la catégorie topologique est identique à la catégorie différentiable (en dimension 2: Kerékjártó 1923, en dimension 3 : Moise, Bing 1950). En revanche, ce résultat est faux à partir de $n \geq 4$: Milnor (1956), a montré qu'il existe 28 structures différentiables sur la sphère S^7.

2.1 Invariants en basse dimensions

La recherche d'invariants remonte aux travaux d'Euler puis de Poincaré. Euler s'est intéressé aux variétés topologiques de dimension 1, à savoir, les graphes, pour résoudre le problème du parcours des ponts de Konigsberg. Il définit la notion de graphes Euleriens. Il a aussi découvert une formule pour caractériser topologiquement des graphes ou des polyèdres: la caractéristique topologique d'Euler qui déviendra caractéristique d'Euler Poincaré, après les travaux sur l'homologie de ce dernier. Si S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, F le nombre de faces, l'invariant vaut (pour un polyèdre):

$\chi(G) = S - A + F.$

Si le graphe subit une déformation homotopique, la caractéristique D'Euler demeure inchangée: c'est donc un invariant topologique.

Une autre notion que l'on peut dégager de la théorie des graphes et qui a une importance capitale en topologie, est la notion de k-connexité. Un graphe est k-connexe quand on peut le disconnecter en lui ôtant k arêtes (c'est une version "discrète" de la théorie de l'homotopie introduite par Poincaré). En définissant le groupe fondamental, puis les groupes d'homotopie superieurs, Poincaré ne fait pas autre chose que de traduire la notion de k-connexité dans le cadre des espaces topologiques. En topologie algébrique, on dit qu'un espace topologique est k-connexe, si tous les groupes d'homotopie $\pi_i(X)$ sont nuls jusqu'à $i = k - 1$ et $\pi_k(X)$ non nul. Ainsi, la sphère S^{k+1} ou l'espace $\mathbb{R}^{k+2} - \{0\}$ sont k connexes. On peut remarquer que pour disconnecter la sphère de dimension $k+1$, il faut lui ôter une sphère de dimension k : soit un espace de dimension k. D'autre part, en topologie un espace est contractile quand tous ses groupes d'homotopie supérieurs sont nuls, ainsi on pourrait inventer une notion équivalente pour la théorie des graphes (se convaincre qu'un graphe complet pourrait faire l'affaire...).

En dimension deux, la classification topologique (et différentiable) des surfaces se fait par la caractéristique d'Euler Poincaré (où le premier nombre de Betti) et l'information sur le fait qu'elle soit ou non orientable. On remarque en passant, que cela permet de démontrer la conjecture de Poincaré en dimension 2: toute surface compacte simplement connexe ($\pi_1(S) = 0$) est homéomorphe à la sphère (H_1 est l'abelianisé du π_1, donc le premier nombre de Betti est nul et la surface ne contient pas de trou). Hélas, en dimension 3, la classification des variétés est beaucoup plus laborieuse : G. Perelman a montré, depuis peu, la conjecture de Poincaré en dimension 3. Le sujet qui nous intéresse, est la recherche d'invariants dans la catégorie différentiable. Notons encore que la classification topologique des variétés topologiques de dimension 4 est achevée.

2.2 Invariants topologiques en dimension 4

En dimension 4, une variété X compacte, simplement connexe, vérifie: $H_1(X) = 0$ donc par dualité de Poincaré, on a aussi $H_3(X) = 0$, seul $H_2(X)$ est susceptible d'être non nul. On a alors l'intuition que deux 2-cycles (surfaces) Σ_1 et Σ_2 en position quelconque dans X, "contribuant" à l'homologie, peuvent renseigner sur la variété. C'est exactement ce qu'a démontré Michael Freedman en 1982.

Les variétés topologiques de dimension 4 sont classées grâce à la forme quadratique d'intersection $H_2(X, \mathbb{Z}) \times H_2(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$.
Si on note I_X la forme d'intersection de X, on a par exemple:

1. $I_{S^4} = 0$: il n'y a pas de deux-cycles non triviaux ($H_2(S^4, \mathbb{Z}) = 0$).
2. $I_{S^2 \times S^2}, = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $H_2(S^2 \times S^2, \mathbb{Z})= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$: il y a deux cycles en position générale $A = S^2 \times pt$, $B = pt \times S^2$ et $\langle A, B\rangle = \langle A, B\rangle = 1$, $\langle A, A\rangle = \langle B, B\rangle = 0$.
3. $I_{M\sharp N} = \begin{pmatrix} I_M & 0 \\ 0 & I_N \end{pmatrix}$:$H_2(M\sharp N, \mathbb{Z}) = H_2(M, \mathbb{Z}) \oplus H_2(M, \mathbb{Z})$, ($M\sharp N$ est la somme connexe de deux variétés de dimension 4).

S. Donaldson, dans les années 80, E. Witten, dans les années 90, utilisent de nouvelles techniques issues des théories de jauge pour définir de nouveaux invariants des variétés de dimension 4, cette fois dans la catégorie différentiable. Nous rappellons donc quelques éléments de théorie de jauge.

3 Eléments de théorie de jauge

3.1 Fibré et connection

Définition

Un fibré vectoriel $\mathcal{C}^\infty$ est une variété E C^∞, muni d'une projection : $E \xrightarrow{p} M$ où M sur une variété différentiable C^∞ et telle qu'il existe un recouvrement de M par des ouverts de cartes $(V_i, \varphi_i : V_i \xrightarrow{\sim} U_i \subset \mathbb{R}^n)$ et des difféomorphismes C^∞ $\Phi_i : p^1(V_i) \to V_i \times \mathbb{R}^n$ tels que le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(V_i) \arrow[rr, "\Phi_i"] \arrow[dr, "p"'] & & V_i \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "p_i^1"] \\
& V_i &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Exemples

1. Le fibré trivial $M \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{p} M$.
2. Le fibré tangent $TM \xrightarrow{p} M$ à la variété.

Définition

Si $E \xrightarrow{p} M$ est un fibré vectoriel, une application linéaire
$\nabla : C^\infty(E) \to C^\infty(T^*M \otimes E)$ est une connexion si:
$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$ ie:
$\nabla(fs)(X)(x) = df(X).s(x) + f(x)\nabla s(X)(x)$, $X \in T_xM$

Dans cette définition, s désigne une section et vérifie (au moins localement) la relation: $\pi \circ s = id_M$

Connexion en coordonnées locales

Si s_i est une base locale pour E, $s = \Sigma_i f^i s_i$ on a:

$\nabla s = df^i \otimes s_i + f^j \nabla s_j$
$\nabla s = df^i \otimes s_i + \omega^i_j f^j \otimes s_i$

Avec $\nabla s_j = \omega^i_j \otimes s_i$ et $\omega^i_j = \Gamma^j_{ki} dx^k$,

Nous n'avons pas indiqué les signes sommes (inutiles): c'est la convention d'indices d'Einstein. On commet, usuellement, quand il n'y a pas d'ambiguité, l'abus de notation: $\omega^i_j = \omega_{i,j}$.
Cette 1- forme de connexion, qui est élément de l'algèbre de Lie du groupe de Lie des changements de repères ($SO(n)$ en géometrie Riemannienne), n'est pas définie intrinsèquement si on change de coordonnées (changement de jauge): $s_{i'} = h^i_{i'} s_i$, $s_i = h^{i'}_i s_{i'}$ avec $h = h^i_{i'}, h^{-1} = h^{i'}_i$. Un simple calcul montre que: $\omega' = dh.h^{-1} + h\omega h^{-1}$.
Dans le cas de la géométrie Riemannienne, $\Gamma^j_{ki} X_j$ représente les symboles de Christoffel pour la connexion de Levi-Civita.

Extension aux p-formes

Comme pour la dérivation classique, on peut étendre la définition de la connexion aux formes de degrés quelconques. Soit θ_p une p-forme, on a une application de $C^\infty(\Lambda^p T^*M \otimes E) \to C^\infty(\Lambda^{p+1} T^*M \otimes E)$:
$\nabla(\theta_p \otimes s) = d\theta_p + (-1)^p \theta_p \wedge \nabla s$

3.2 Courbure d'une connexion

On constate que: $\nabla^2(fs) = \nabla(df + f\nabla^2 s) = df \wedge \nabla s + f\nabla s - df \wedge \nabla s = f\nabla^2 s$

Définition

On appelle courbure de la connexion ∇, l'opérateur ∇^2. C'est donc une application $C^\infty(E)$-linéaire de $C^\infty(E) \to C^\infty(\Lambda^2 T^*M \otimes E)$.

Remarque

La courbure peut donc être vue comme une section du fibré

$Hom(E, \Lambda^2 T^*M \otimes E) \simeq \Lambda^2 T^*M \otimes End(E)$.

Il s'ensuit que l'on peut considérer ce dernier homomorphisme comme une forme de dégré 2 sur la variété de base M à valeur dans $End(E)$. Localement, la courbure pourra être considérée comme une matrice de 2 formes sur M de taille, la dimension de E.

Courbure en coordonnées locales

Notons Ω^i_j la matrice de courbure, on a localement:

$\Omega_j^i \otimes s_j = \nabla(\nabla s_j) = \nabla(\omega_j^i \otimes s_i) = (d\omega_j^i - \omega_j^p \wedge \omega_p^i) \otimes s_i = (d\omega_j^i + \omega_p^i \wedge \omega_j^p) \otimes s_i$

Donc $\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_p^i \wedge \omega_j^p$ qui s'écrit en notations matricielles: $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$.

Changement de jauge

On a vu que, sous l'effet d'un changement de jauge, la connexion ne se comporte pas comme un tenseur:
$s_{i'} = h_{i'}^i s_i,\ s_i = h_i^{i'} s_{i'},\ \omega' = dh.h^{-1} + h\omega h^{-1}$ avec $h = h_{i'}^i, h^{-1} = h_i^{i'}$, contrairement à la courbure.
On a donc: $\Omega' = h\Omega h^{-1}$.

3.3 Fibrés principaux

Il est très commode d'introduire alors, un autre type de fibré, appelé fibré principal, et qui gère les changements de repères. Sur ce fibré, agit le groupe de jauge (changements de repères).
Ainsi, on peut introduire différents G-fibrés principaux. En choisissant $G = SO(n)$, on définit le fibré principal des repères de la géométrie riemanienne, avec $G = U(1)$ on a le fibré principal des changement de phases en électromagnétisme (cas des invariants de Seiberg Witten).

4 Espace des modules

Une structure indispensable, sur laquelle reposent les recherches modernes d'invariants, est l'espace de module. Dans les differentes applications, il convient de le définir judicieusement. L'usage veut qu'il soit invariant sous l'action d'un groupe de symetrie. Dans le cas des théories de jauge (dimension 4) l'espace de module s'obtient en quotientant un espace produit (dont un des facteurs est l'espace affine des connexions) par le groupe de jauge. Pour les invariants de Seiberg-Witten, l'espace des connexions considéré, est modelé sur le groupe de jauge $U(1)$: "espace des phases" de la $Spin^c$ structure. Pour ceux de Donaldson, on prend l'ensemble des connexions auto-duales (ASD) et le groupe de jauge est $SU(2)$. Pour introduire les invariants de Seiberg et Witten, il faut introduire un revêtement à deux feuillets de la géometrie riemanienne : la géométrie spinorielle. Dans la section suivante, nous rappellerons quelques définitions sur la notion d'algèbre de Clifford et de géometrie spinorielle.

4.1 Opérations sur l'espace des modules

1. La première opération est la linéarisation. On peut alors, dans certains cas, faire intervenir des complexes elliptiques dont on calcule l'indice fournissant la dimension de l'espace.

2. L'étape suivante, est sa compactification, dans le cas où il ne l'est pas.

3. On doit ensuite définir une orientation.

4. Enfin, on peut définir des invariants.

4.2 Espace de modules en géométrie différentielle

Les espaces de modules ont d'abord fait leur apparition en géométrie algébrique: théorie des déformations, schéma de Hilbert... Les espaces de modules sont utilisés en géométrie différentielle, dans des situations variées. En géométrie de la dimension 4, on calcule les invariants de Seiberg Witten ou de Donaldson dans les théories de jauge. En dimension $10 = (4 + 3 \times 2)$, on définit l'espace de modules, des courbes des applications J-holomorphes, utilisé pour définir la cohomologie quantique en géométrie algébrique ou symplectique.

4.2.1 Espaces de modules associés aux équations de Seiberg-Witten

La situation est la suivante:
Soit X une variété de dimension 4 compacte, orientée, munie d'une structure $Spin^c$ caractérisée par le fibré en droite $L = \det(S^+)$, où S^+ est le fibré des spineurs positifs. On peut alors considérer aussi, une connexion sur le fibré principale $U(1)$, usuellement noté A. L'espace des modules est alors:

$$\mathcal{M}_L = \{(\Phi, A) \in \Gamma(S^+) \times \mathcal{C}(P_{U(1)}) : D_A = 0, F_A^+ = \frac{1}{4}\omega^\Phi\}/\mathcal{G}$$

où $\mathcal{G}$ est le groupe de jauge.

4.2.2 Espace de modules associés à la cohomologie quantique

On considère ici une variété symplectique (X, ω) et l'espace $\mathcal{J}$ des structures presque complexes adaptées à la forme symplectique. Rappelons qu'une 2-formes ω sur une variété M est dite symplectique si elle est fermée et non dégénérée. Une courbe pseudo-holomorphe est une application $u : (\Sigma, j) \to (M, J)$ qui vérifie $du \circ j = J \circ du$.
(Σ, j) est une surface de Riemann, c'est à dire une variété complexe de dimension complexe 1.

Définition.

Soit (Σ, j), une surface de Riemann compacte, de genre g, et soit $A \in H_2(M, Z)$ une classe d'homologie. L'espace des modules $\mathcal{M}(A, J)$ est l'ensemble des courbes pseudo-holomorphes u définies ci-dessus, dont l'image représente la classe d'homologie A quotientée par $Aut(CP^1)$. Cet espace de modules permet d'introduire des invariants très importants en théorie des cordes. Ce sont les invariants de Gromov-Witten. Des recherches encore très actives sont menées dans le cadre de la symétrie miroir.

4.3 Résultats obtenus par cette approche

Une fois déterminés, ces espaces de modules fournissent des invariants intéressants. Selon les cas, ce sont les invariants de Donaldson, de Seiberg-Witten ou de Gromov-Witten. Si la variété est symplectique, Taubes a montré un résultat très important: l'équivalence entre les invariants de Seiberg Witten et ceux de Gromov-Witten, dans le cadre de la géométrie de dimension 4. D'un autre côté, les travaux de M.Konsewich permettent de retrouver et d'affiner des resultats de géometrie énumérative Il a bâti avec B.Dubrovin, G.Tuan, les règles rigoureuses d'une cohomologie quantique qu'avaient pressenties les physiciens spécialistes de théorie quantique des champs.

5 Rappel de géométrie spinorielle en dimension 4

L'espace de modules, sur lequel on travaille pour définir les invariants de Seiberg et Witten, fait réference d'une part, au fibré des spineurs, et d'autre part, à la connexion A liée au fibré en droite, de groupe structural $U(1)$ de l'électromagnétisme. La conjugaison des deux entitées précédentes, nécessite la construction d'une structure spin, tordue "par l'électromagnétisme". C'est ce que l'on appelle une $spin^c$ structure. La première étape revient à définir les algèbres de Clifford et les structures spin. La seconde de rappeller ce qu'est une structure $spin^c$. L'objectif avoué est de définir une géométrie plus fine adaptée à la mécanique quantique.

5.1 Algèbres de Clifford et groupe Spin

Définition

On appelle algèbre de Clifford de $\mathbb{R}^n$ notée Cl_n, le quotient de l'algèbre tensorielle $\mathcal{T}\mathbb{R}^n$ par l'idéal engendré par les $x \otimes x + ||x||^2.1$, pour x réel.

L'algèbre Cl_n est $\mathbb{Z}_2$-graduée et se subdivise en éléments de longueurs paires Cl_n^0 et impaires Cl_n^1. En outre, l'application de l'algébre extèrieure: $\Lambda^*\mathbb{R}^n$ dans Cl_n, qui à $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p}$ associe $e_{i_1}.e_{i_2}...e_{i_p}$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On construit les algèbres de Clifford par itération grâce à la notion d'*application de clifford*.

Définition

Soit $Cl(V, q)$ une algèbre de Clifford. Une application de Clifford est une application de V dans A où A est une algèbre possèdant une unité notée 1_A, satisfaisant $f(x)^2 = -q(x)1_A$.

Proposition

Une application de Clifford s'étend de manière unique en une application de $Cl(V, q)$ dans A.

L'algèbre de Clifford, la plus simple que l'on puisse construire ainsi, est l'algèbre des nombres complexes. On peut ensuite construire l'algèbre des quaternions, donnés en mécanique quantique par les matrices de Pauli.

On peut, dans la géométrie de Clifford, définir l'analogue du groupe orthogonal (en réalité sa "racine carrée"), c'est ce qu'on appelle le groupe Spin (remarque: on peut aussi définir le groupe Pin).

Définition

$Spin(n)$ est un sous groupe dans $Cl^0(n)$ défini par:

$$Spin(n = \{x_1...x_{2r}, x_i \in \mathbb{R}^n, ||x_i|| = 1\}$$

Proposition

Pour tout élément q de $Spin(n)$ et v dans $\mathbb{R}^n$, $q.v.q^{-1} \in \mathbb{R}^n$. Cela fournit une représentation $\rho : Spin(n) \to End(\mathbb{R}^n)$ définie par $\rho(q).v = q.v.q^{-1}$. L'image de ρ est exactement $SO(n)$ et son noyau ± 1. Via ρ, $Spin(n)$ est un revêtement à deux feuillets de $SO(n)$.

On a la suite exacte:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin(n) \xrightarrow{\rho} SO(n) \longrightarrow 1$$

Il faut introduire une $Spin^c$ structure pour définir les équations de S.W

Définition

$Spin^c(n) = Spin(n) \times S^1/\{\pm 1\} \subset Cl_n \otimes \mathbb{C}$.
On a la suite exacte:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin^c(n) \xrightarrow{\rho^c} SO(n) \times S^1 \longrightarrow 1$$

Avec $\rho^c([g,z]) = (\rho(g), z^2)$

5.2 Espace vectoriel des spineurs

On considère, désormais, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension m paire, muni d'une base $(e_1, ..., e_{2m})$ et d'un produit scalaire euclidien: $<,>$. On se donne une polarisation: $\mathbb{C}^n = W \oplus W'$ avec:

1. base de W: $w_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - ie_{k+m})$
2. base de W': $w_{k+m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k + ie_{k+m})$
3. $<,>_W = <,>'_W = 0$

Définition

L'espace des spineurs S est le C-espace vectoriel suivant:

$$S = \mathbb{C} \oplus W \oplus \wedge W \oplus ... \oplus \wedge^m W$$

W^m, S^+ dénote la partie paire de cette somme, S^- dénote la partie impaire.

Action de Clifford particulière

On définit:

$\chi : \mathbb{C}^{2m} \to End_{\mathbb{C}}S$: $x = x_w + x_{w'} \to (\psi \in S \to \sqrt{2}(x_w \wedge \psi - x_{w'} \lrcorner \psi')$

On vérifie que l'on a bien $\chi(x) \circ \chi(x) = -q(x).Id$

5.3 Géométrisation

On a défini l'algèbre linéaire spinorielle. Tout cela peut être transposé dans le langage géométrique avec plus ou moins de succès, il y a des obstructions à ce qu'une variété puisse globalement être munie d'une structure Spin. On montre cependant, qu'une variété de dimension 4, compacte, orientée, peut toujours être munie d'une *spin*^{c} structure. L'algèbre de Clifford considérée en géométrie, est $Cl(T_x^*(M), q)$, fibre du fibré cotangent. Le point important est la définition du fibré principal de groupe Spin(n) noté Q. En fait, il "suffit" de relever le fibré principal de groupe $SO(n)$ noté P à Q.
Cela se fait en remarquant que, $e_1.x_{\theta/2}= e_1.(cos(\theta/2)e_1 + sin(\theta/2)e_2 = cos(\theta/2) + sin(\theta/2)e_1.e_2$, élément de $Spin(n)$, est une rotation d'angle $\theta/2$ qui relève une rotation d'angle θ dans $SO(n)$.
On peut définir, ensuite, les fibrés vectoriels des vecteurs et des spineurs respectivement associés au fibres principaux P et Q.

Module et connexion de Clifford, opérateur de Dirac

Il faut définir un cadre compatible avec la notion d'algèbre de Clifford, d'où les définitions suivantes.

Définition

On appelle module de Clifford: un espace vectoriel E, de dimension finie, muni d'une action c $\mathbb{Z}_2$-graduée en algèbre de Clifford. On géométrise avec la notion de module de Clifford sur une variété M. C'est un fibré $\mathcal{E}$ $\mathbb{Z}_2$ graduée en algèbre de Clifford $Cl(T_x^*(M))$.

Définition

Une connexion sur un module de Clifford est une connexion sur un fibré vectoriel compatible avec la structure de module de Clifford, ceci se traduit par la règle de Leibniz: $\nabla_X^{\mathcal{E}}(c(a).s) = c(\nabla_X^{LC}a).s + c(a).\nabla_X^{\mathcal{E}}.s$.

Définition

Si $\nabla_X^{\mathcal{E}}$ désigne une connexion de Clifford, on appelle opérateur de Dirac: la cliffordisation de la connexion": $D^{\mathcal{E}} = c \circ \nabla^{\mathcal{E}}$.
En coordonnées locales nous avons:

$\nabla^{\mathcal{E}} = \Sigma_i e^i \otimes \nabla_{e_i}^{\mathcal{E}}$, $D^{\mathcal{E}} = \Sigma_i c(e^i)\nabla_{e_i}^{\mathcal{E}}$.

Relèvement de la connexion de Levi-civita a Spin

La connexion riemannienne est la matrice antisymétrique:

$(\omega_{i,j}) = \Sigma\prime_{i<j}\omega_{i,j}e_i \wedge e_j$, son relèvement est $\frac{1}{2}\Sigma\prime_{i<j}\omega_{i,j}c(e_i).c(e_j)$.

6 Quelques points sur les invariants de Seiberg-Witten

Les invariants de Seiberg et Witten sont apparus en 1994 et font suite à ceux de Donaldson, obtenus un peut plus tôt. Ils ont le mérite d'être plus calculables.

6.1 Présentation

Donaldson, au début des années 80 utilise les équations d'autodualité provenant de la physique des particules. Il définit un espace de module des connexions autoduales. Le désagrément vient du fait que la théorie de jauge ($SU(2)$ sous jacente, est non abélienne, et l'espace de module n'est pas compact. Seiberg et Witten, en s'inspirant du modèle de Landau-Ginzburg de la supraconductivité, introduisent deux équations provenant du groupe de jauge $U(1)$, cette fois une théorie abélienne. Elles ont l'avantage de permettre la définition d'un espace de module compact donc moins pathologique et de répondrent plus simplement aux questions résolues par Donaldson. On peut aussi montrer qu'à partir des théories de Yang-Mills supersymétriques, les équations d'autodualité (limite ultraviolette de la théorie), rejoignent les équations de S.W (limite infrarouge).

6.2 Survol de la théorie de Seiberg Witten

On définit tout d'abord les équations de Seiberg Witten.

Les équations de Seiberg Witten et l'espace de modules associé

M^4 désigne une variété orientée et compacte. On considère le $SO(4)$ fibré principal des repères, noté P. On fixe un fibré en droites complexes L. Ce qui équivaut à la donnée d'un fibré principal de groupe $U(1)$, noté $P_{U(1)}$ "la phase". On note A, la connexion associée au $U(1)$-fibré principal. On relève (revêtement double) ensuite le fibré $P \times_{M^4} P_{U(1)}$ via ϱ_c en un $Spin^c(4)$-fibré principal Q. Si c désigne l'application de Clifford, on peut définir la cliffordisation de la connexion (les éléments de $T^*_x(M)$ deviennent des éléments

d'une algèbre de Clifford).
On peut alors définir l'opérateur de Dirac $D_A = c \circ \nabla_A$. On considère enfin la partie autoduale de la courbure (2 formes, à valeur imaginaire pure). Si Φ désigne un Spineur positif, ω^Φ est la deux formes définie par:

$$\omega^\Phi(X,Y) =< X.Y.\Phi, \Phi > + < X, Y > |\Phi|^2$$

$<,>$ désigne le produit scalaire hermitien. On montre que cette forme est antisymétrique à valeur imaginaire pure et autoduale. On peut donc l'identifier à la courbure de la connexion A et on obtient les équations de Seiberg-Witten:

$D_A\Phi = 0$ et $\Omega^+_A = -\frac{1}{4}\omega_\Phi$.

Proposition

Le résultat clef est que le groupe de jauge agit sur l'espace des solutions. Dans un changement de jauge $U(1)$, si (Φ, A) est une solution des équations de S.W alors $(\frac{1}{f}\Phi, f^*A) = (\frac{1}{f}\Phi, A + \frac{df}{f})$ l'est aussi. La courbure étant un tenseur, on a $\Omega^+_{f^*A} = \Omega^+_A$.
D'où la définition suivante.

Définition

L'ensemble $\mathcal{M}_L = \{(\Phi, A) \in \Gamma(S^+) \times \mathcal{C}(P_{U(1)}) : D_A = 0, F^+_A = \frac{1}{4}\omega^\Phi\}/\mathcal{G}$,
où $\mathcal{G}$ est le groupe de jauge $U(1)$, est l'espace de modules des solutions des équations de Seiberg Witten.

Remarque

l'Espace de modules $\mathcal{M}_L$ est compact.

Linéarisation des équations

On remarque que les solutions du système d'équations de S.W sont dans le noyau d'un certain opérateur, que l'on notera P_1. L'objectif est maintenant de linéariser cet opérateur au voisinage d'une solution.
Soit l'opérateur:

$$\Omega(S^+) \times \mathcal{C}_{P_{U(1)}} \to \Omega(S^-) \times \Omega^2_+(i\mathbb{R}) : (\Phi, A) \mapsto (D_A\Phi, \Omega^+_A + \tfrac{1}{4}\omega_\Phi).$$

On appelle P_1 la linéarisation en (Φ, A), soit $A_t{=}A + t\eta$, $\Phi_t = \Phi + t\Psi$.
On montre:

$$P_{1(\Phi,A)} : \Gamma(S^+) \times \Gamma(\Lambda^1) \to \Gamma(S^-) \times \Gamma(\Lambda^2_+)$$

$$P_{1(\Phi,A)}(\Psi, \eta) = (\eta\Phi + D_A\Psi, d\eta_+ + \tfrac{1}{4}\omega_{\Phi,\Psi}).$$

Il faut maintenant calculer l'espace tangent à l'orbite $\mathcal{G}(P).(\Phi, A)$.
On prend $f_t = 1 + ht$, une famille de transformations de jauge, cela permet d'obtenir un opérateur linéaire :

$P_{0(\Phi,A)} : \Gamma(\Lambda^0) \to \Gamma(S^+) \times \Gamma(\Lambda^1)$ donné par: $P_{0(\Phi,A)}(h) = (-h\Phi, dh)$.

La combinaison de ces deux opérateurs linéarisés fournit un complexe elliptique (on peut montrer que $P_{1(\Phi,A)} \circ P_{0(\Phi,A)} = 0$).

On calcule l'indice de cet opérateur. Donnons la suite exacte de ce complexe:

$$\Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{P^0_{(\Phi,A)}} \Gamma(S^+) \oplus \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{P^1_{(\Phi,A)}} \Gamma(S^-) \oplus \Gamma(\Lambda^2_+)$$

En explicitant les applications P_0 et P_1 sur chacunes des flèches, il vient plus précisement: :

$$\Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{(0,d)} \Gamma(S^+) \oplus \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{(D_A, pr_+ d)} \Gamma(S^-) \oplus \Gamma(\Lambda^2_+)$$

On peut donc scinder ces deux complexes en deux sous complexes, le premier est:

$$\Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{pr_+ d} \Gamma(\Lambda^2_+)$$

Le second complexe est :

$$\Gamma(S^+) \xrightarrow{D_A} \Gamma(S^-)$$

Enfin, on peut calculer l'indice analytique de chacun des sous-complexes. A ce sujet, on rappelle que l'indice d'un complexe elliptique, est donné par la somme alternée des dimensions de ses espaces de cohomologie. D'autre part, le théorème de l'indice D'Atiyah-Singer affirme que l'indice s'exprime en fonction de classes caractéristiques (signatures de la topologie de la variété).

Ici, on calcule donc l'indice de chacun des deux complexes elliptiques. Leur somme est la dimension "virtuelle" d de l'espace de module considéré.Ici on a:

$d = \frac{1}{4}c_1(L)^2 - \frac{1}{4}(2\chi + 3\sigma)$

Dans cette écriture, $c_1(L)$ désigne la première classe de Chern du fibré en droite associée à la connexion $U(1)$, χ la caractéristique d'Euler Poincaré, σ la signature de la forme quadratique d'intersection: $\sigma = b_+ - b_-$.

Invariants de Seiberg Witten

On peut alors définir les invariants de Seiberg Witten:

1. Si l'espace de module est de dimension négative, l'invariant de Seiberg Witten $SW(L) = 0$.
2. Si l'espace de module est fini (de dimension nulle), on a une somme algébrique de points.
3. Si l'espace de module est de dimension strictement positive, on intègre la première classe de Chern, tensorisée d fois par elle même sur l'espace de module: $SW(L) = \int_{\mathfrak{M}} c_1(L)^d$.

References

[1] T.Friedrich *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, Graduate Studies in Mathematics v.25, A.M.S 2000.

[2] A.G.Sergeev *Vortices and Seiberg Witten equations*, Nagoya mathemtical lecture v.5, 2001.

[3] P.Griffiths, J.Harris, *principle of algebraic geometry*, Wiley-interscience, New York, 1978.

[4] D.McDuff, D.Salamon, *Introduction to symplectic géometry* Oxford University Press, 1995.

[5] D.McDuff, D.Salamon, *J-holomorphic Curves and Quantum Cohomology*, Univ. Lecture series 6, A.M.S., 1994.

[6] M. Kontsevich, Y.Manin, *Gromov-Witten Classs, Quantum Cohomology, and enumerative Geometry*, Mirror symetry II, A.M.S/IP Studies in advanced Math., Vol 1 A.M.S, 1997, pp. 607-653.

[7] D.Bennequin *Monopôles de Seiberg-Witten et conjecture de Thom*, Séminaire Bourbaki, n^o 807, 1995.

[8] M.Audin *Cohomologie quantique* Séminaire Bourbaki,n^o 807, 1995.

[9] S.Donaldson, P. Kronheimer,*The geometry of four manifolds*, Oxford University Press, 1990.

[10] J.Le Potier, *fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Publication de l'Université Paris 7.