CNAM Filière : AERONAUTIQUE
Introduction aux espaces fonctionnels et à l'analyses spectrale
Soutien Mathématiques Cours 3

Septembre 2016

1 Espace topologique, espace metrique

Un **espace topologique** $(X, \mathcal{O})$ est un ensemble muni d'une **famille d'ouvert** vérifiant les axiomes :

1. $\emptyset, E$ sont dans $\mathcal{O}$
2. $A, B \in$O$\Rightarrow A \bigcap B \in \mathcal{O}$
3. $A_i \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$

Voisinage d'un point

On dit qu'une partie V est **un voisinage** de x si il contient **un ouvert** contenant x
Cette définition permet d'introduire la notion de continuité entre deux espaces topologique et accessoirement de retrouver la notion de fonction numerique continue.

Fonction continue

On dit qu'une application f de X dans Y est continue en x_0 si et seulement si :
Pour tout voisinage de $f(x_0)$ dans Y, il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que $f(V) \subset W$
Une fonction f est continue sur X si elle est **continue** en tout point de X

Espace metrique

Un espace métrique (E,d) est un ensemble muni d'une distance, c'est à dire d'une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ satisfaisant :

1. $\forall (x,y) \in E \times E \; d(x,y) = d(y,x)$
2. $\forall (x,y) \in E \times E \; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $\forall (x,y,z) \in E^3 \; d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

Exemples

1. Le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la **distance euclidienne** est un espace metrique.
2. L'ensemble des mots sur l'alphabet$\{0,1\}$ muni de la distance suivante : $d(\sigma,\tau) = (\frac{1}{2})^k$ si $\sigma = \alpha\sigma' \; \tau = \alpha\tau'$ avec α **plus long prefixe** de longueur k commun aux deux chaines est un espace metrique.
3. $L^1[0,1]$ muni de la distance : $d(f,g)$=$\int_I |f(x) - g(x)| dx$
4. un **espace vectoriel normé**, $E, \|.\|$ est un **espace métrique particulier** : la distance est donnée par $d(x,y) = \|x - y\|$

Voisinage d'un point dans un espace metrique

On dit que V est un voisinage du point x_0 dans un espace un espace métrique (E,d) si il contient une boule ouverte centrée sur le poin x_0.
Les boules ouvertes forment dans un espace métrique une **base fondamentale d'ouverts**.

Fonction continue dans un espace métrique

On retrouve la propriété bien connue de fonction continue en x_0 :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / d(x,x_0) < \alpha \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

2 Tribu, Mesure, Probabilité :

sera question dans la suite du cours, de la notion d'espace mesurable défini sur un ensemble muni d'une tribu :

Tribu

Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ un sous ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

1. $\mathcal{T} \neq \emptyset$
2. $A \in \mathcal{T} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{T}$
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{T}$, $A \cup B \in \mathcal{T}$

Le Couple $(\Omega, \mathcal{T})$ désigne un **espace mesurable**, dans le cas des probabilité on parlera d'**espace probabilisable** ; par exemple, dans $\mathbb{R}$, on peut définir **la tribu des Boréliens** $\mathcal{B}$) :ce sont **les intervalles** de $\mathbb{R}$.

Mesure

On appelle mesure positive sur un espace mesurable, toute application μ de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}^+$ verifiant :

1. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
2. $\forall n \in \mathbb{N} A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$

Exemples de mesure

1. Sur la droite réelle on définit la **mesure de Lebesgue** de l'intervalle $[a, b]$ par $\mu([a, b]) = b - a$, "longueur de l'intervalle"
2. **mesure de Dirac** δ_a en a $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A$, 0 sinon
3. **mesure de dénombrement** Δ : Si E est un ensemble discret, $A \subset E$, $\Delta(A) = card(A)$ si A fini $\Delta(A) = +\infty$ sinon

Nous allons donner quelques notions sur l'**intégrale de Lebesgues**.

Fonction mesurable

une fonction de l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$ dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$,alors f est mesurable si $f^{-1}(]-\infty, a[)$ appartient à $\mathcal{T}$) pour tout réeel a.

Fonction étagée

Une fonction étagée est une fonction mesurable prenant un nombre fini de valeurs et tell que l'image réciproque d'une valeur est de mesure finie :
$f = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{1}_{A_i}$ avec $\mu(A_i) < +\infty$

Approximation des fonctions mesurables

Toute fonction mesurable **positive**est limite croissante d'une suite de fonctions étagées.

Intégrale d'une fonction étagée

L'intégrale relative a μ est donnée par :
si $f = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{1}_{A_i}$ alors $\int d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i)$

Intégrale d'une fonction positive

Soit une fonction mesurable positive, alors l'intégrale de f par rapport à μ est : $\int f d\mu = Sup\{\int \chi d\mu, \forall \chi \leq f$ et χ étagée$\}$

Intégrale d'une fonction mesurable

On pose $|f| = f^+ + f^- = max(f, 0) + max(-f, 0)$ On dit que la fonction mesurable f est intégrable quand $\int |f| d\mu < +\infty$
on pose alors : $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$

Exercices :

Exercice 1

Montrer que les normes de la convergence uniforme, de la moyenne, et de la moyenne quadratique sont équivalentes dans un espace vectoriel de dimension finie