CNAM Filière : AERONAUTIQUE
Introduction aux espaces fonctionnels et à l'analyses spectrale
Soutien Mathématiques Cours 2

Septembre 2016

1 Signaux périodiques

On se place dans l'espace des signaux périodiques de periode T, Le but du cours est de rappeler quelques éléments sur les séries de Fourier.

Série trigonométrique

On appelle série trigonométrique la suite de terme générale f_n définie par :
$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k cos(\frac{2k\pi x}{T}) + \sum_{k=1}^{n} b_k sin(\frac{2k\pi x}{T})$

Théorème de convergence simple de Dirichlet

1. Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et de période T admet un **développement en séries de Fourier** $DSF_n(f)$ donné par :

   $a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k cos(\frac{2k\pi x}{T}) + \sum_{k=1}^{n} b_k sin(\frac{2k\pi x}{T})$, avec : $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$,
   $a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)cos(\frac{2k\pi x}{T})dx$, $b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)sin(\frac{2k\pi x}{T})dx$
2. $DSF_n(f)$ **converge simplement** vers $f(x)$ si f continue en x et vers $\frac{f^+(x) + f^-(x)}{2}$ sinon : On a fait **une décomposition spectrale**.

Théorème de convergence uniforme

Si f est continue sur $\mathbb{R}$, $DSF_n(f)$ **converge uniformement** vers f En traitement du signal On évite **ainsi le phénomène de Gibbs**.

Base orthonormée de l'espace de Hilbert $L^2(0,T)$

Une **base orthonormée** de l'espace des signaux de période T est donnée par : $\{\frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{2}{\sqrt{T}}cos(\frac{2n\pi x}{T}), \frac{2}{\sqrt{T}}sin(\frac{2n\pi x}{T}), n \in \mathbb{N}\}$
On peut écrire le **théorème de Pythagore** (Identité de Parseval) en développant l'énergie du signalsur cette base.

Identité de Parseval

La convergence au **sens de l'énergie** donne l'identité de Parseval :
$\int_0^T |f(x)|^2 dx = Ta_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$

2 Théorème fondamentaux de l'intégration

Nous donnerons par la suite quelques notions sur l'intégrale de Lebesgues, un de ces points fort par rapport à l'intégrale de Riemann est l'introduction facile du **théorème de convergence dominées** que nous énoncons ici sans démonstration :

Théorème de convergences dominées

On considère une suite de fonctions f_n convergant simplement vers une fonction g : $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = g(t)$
On suppose que $\forall n > n_0, \forall t, |f_n(t)| < g(t)$ (**hypothèse de domination**), et $\int g(t)dt < +\infty$ alors : $\lim_{n\to+\infty} \int f_n(t)dt = \int \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt$
Ce théorème à **deux applications fondamentale** : le théorème de continuité et le théorème de dérivation.

Théorème de continuité

Soit $f : X \times T \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ On suppose que $f(.,t)$ continue sur X, $\forall t \in T$, si $|f((x,t)| < h(t)$ (**hypothèse de domination**), et $\displaystyle\int h(t)dt < +\infty$
Alors $F(x) = \displaystyle\int f(x,t)dt$ **est continue**

Théorème de dérivation

Soit $f : X \times T \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ On suppose que $f(.,t)$ dérivable sur X, $\forall t \in T$, si $|\dfrac{\partial f((x,t)}{\partial x}| < h(t)$ (**hypothèse de domination**), et $\displaystyle\int h(t)dt < +\infty$
Alors $F(x) = \displaystyle\int f(x,t)dt$ **est dérivable** et $F'(x) = \displaystyle\int \frac{\partial f((x,t)}{\partial x}dt$

3 Produit de convolution, opérateur de Dirac

Une opération usuelle en théorie du signal est le **produit de convolution**, cette opération est utilisée par exemple en traitement d'image pour comme filtre pour **detecter des contours**, ou **lisser des images**.

Produit de convolution

Soit f et g deux fonctions, on définie le produit de convolution (quand il existe) : $f * g$ par :
$f * g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$
On vera en exercice que le **produit de convolution** à des **vertues régularisante** : il adopte la classe de régularité de la fonction la plus dérivable...

Impulsion, distibution de Dirac

On peux montrer que la fonction nulle en dehors du support $[-1/n, 1/n]$ et constante de valeur $n/2$ n'a pas de limite simple au sens des fonctions. Nous admettons que sa limite au **sens des distributions** (généralisation des fonctions) est une impulsion : "l'**impulsion de Dirac**" notée δ_0

Théorème

soit f une fonction, on peux montrer que $f * \delta_0 = f$ Le dirac en 0 est un **élément neutre** pour le produit de convolution

4 Signaux non périodiques

On peux introduire les séries de Fourier à **coefficients complexes**. ainsi le théorème de **décomposition spectrale** donne : $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{(\frac{2n\pi t}{T})}$
les coéfficients de Fourier sont remplacés par le coefficient de Fourier complexe donné par : $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{(-\frac{2ni\pi t}{T})} dt$
Dans les cas d'un signal apériodique la **décomposition spectrale** donne :
$f(t) = \int_{\nu \in \mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$

Transformée de Fourier

On appelle transformée de Fourier ce qui remplace le coéfficient de Fourier dans le cas discret : il s'agit du contenu spectral à la fréquence ν :
$\mathcal{F}(f)(\nu) = \int_{\nu \in \mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$

Exercices :

Exercice 1

On considère la fonction f de période 2π définie pa $f(t) = 1$ sur $[0, \pi[$, $f(t) = 0$ sur $[\pi, 2\pi[$

1. Trouver les coéfficients de Fourier réels :
2. Donner le développement en séride Fourier de f
3. Le développement en serie de Fourier à l'ordre n : $DSF_n(f)$ converge t'il uniformément vers f ?

Exercice 2

On considère la fonction f de période 2 définie pa $f(t) = 1_t$ sur $[0,1[$, $f(t) = t-1$ sur $[1,2[$

1. Trouver les coéfficients de Fourier réels :
2. Donner le développement en séride Fourier de f
3. Le développement en serie de Fourier à l'ordre n : $DSF_n(f)$ converge t'il uniformément vers f ?
4. Calculer l'energie de f c'est a dire $\int_0^T |f(t)|^2$
5. Calculer la somme des énergie des trois premières harmoniques et comparer à l'energie de f

Exercice 3

1. Montrer que si f est une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R})$, alors sa tranformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est bornée. et continue.
2. En déduire, utilisant le théorème de continuité, que $\mathcal{F}(f)$ est continue.

Exercice 4

Montrer que le produit de convolution de de deux fonctions paire est pair et que le produit de convolution d'une fonction paire par une fonction impaire est impaire.

Exercice 5

Calculer le produit de convolution de deux portes de supports respectifs $a \geq b$, $\mathbf{1}_{[-a,a]}$ et $c\mathbf{1}_{[-b,b]}$

1. Donner le resultat dans le cas b=$1/n$, $c = n/2$, on note cette fonction f_n.
2. Trouver la limite simple de la suite de fonction f_n

Exercice 6

Donner la transformée de Fourier d'une porte