CNAM Filière : AERONAUTIQUE

Introduction aux espaces fonctionnels et à l'analyses spectrale

Soutien Mathématiques Cours 1

Septembre 2016

1 Suites de fonctions

On considère une suite de fonctions numériques f_n définies sur un intervalle I, indexées sur $\mathbb{N}$

Definition : Convergence simple

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N})}$ converge **ponctuellement** ou **simplement** vers une fonction f sur I quand quel que soit x appartenant à I la suite de nombres $f_n(x)$ admet une limite que l'on notera $f(x)$
Si une suite converge ponctuellement vers une fonction f sur in intervalle I, on peut envisager d'**autre types de convergences** dites **fonctionnelles** ; On veux dire par là que les fonctions et leurs limites appartiennent à des **espaces de fonctions**. on définira cela plus tard.

Definition : Convergence uniforme

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N})}$ converge **uniformément** vers une fonction f sur I quand $\lim\limits_{n\to+\infty} Sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|dx = 0$

Definition : Convergence en moyenne

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N})}$ converge **en moyenne** vers une fonction f sur I quand $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_I |f_n(x)-f(x)|dx = 0$

Definition : Convergence au sens de l'énergie

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N})}$ converge **en moyenne quadratique** ou **au sens de l'énergie** vers une fonction f sur I quand $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_I |f_n(x)-f(x)|^2 = 0$

2 Espaces fonctionnels

On Considère un ensemble de fonction toutes définies sur un intervalle I

Définition : Espace $L^\infty(I)$

On note $L^\infty(I)$ l'espace des fonctions f vérifiant : $Sup_{x\in I}|f(x)| < +\infty$
Le nombre précédent **ne dépend plus** de x **mais uniquement** de la fonction f et de l'intervalle I ; on pose alors $\|f\|_\infty = Sup_{x\in I}|f(x)| < +\infty$; ce nombre est la **norme infinie** de la fonction f sur I ; on peux montrer que $L^\infty(I)$ muni de cette norme est un **espace vectoriel normé**.

Définition : Espace $L^1(I)$

On note $L^1(I)$ l'espace des fonctions f vérifiant : $\displaystyle\int_I |f(x)| < +\infty$
Le nombre précédent **ne dépend plus** de x **mais uniquement** de la fonction f et de l'intervalle I ; on pose alors $\|f\|_1 = \displaystyle\int_I |f(x)| < +\infty$; ce nombre est la **norme** $L^1(I)$ ou **norme en moyenne sur** I de la fonction f sur I ; on peux montrer que $L^1(I)$ muni de cette norme est un **espace vectoriel normé**.

Définition : Espace $L^2(I)$

On note $L^2(I)$ l'espace des fonctions f vérifiant : $\displaystyle\int_I |f(x)|^2 < +\infty$
Le nombre précédent **ne dépend plus** de x **mais uniquement** de la fonction f et de l'intervalle I ; on pose alors $\|f\|_2 = \displaystyle\int_I |f(x)|^2 < +\infty$; ce nombre est

la **norme** $L^2(I)$ ou **norme en moyenne quadratique sur** I de la fonction f sur I ; on peux montrer que $L^2(I)$ muni de cette norme est un **espace vectoriel normé**.
Remarque On peut montrer que cet espace vectoriel est **mieux** qu'un espace vectoriel normé, c'est en fait **un espace vectoriel euclidien** car la norme peut être déduite d'un **produit scalaire**. ce genre d'espace est très important en analyse spectrale il constitue le point de départ de la théorie des **espaces de Hilbert**.

Définition : Produit scalaire

Un produit scalaire sur un espace vectoriel, est un espace vectoriel muni d'une forme biliniléaire symétrique φ définie positive :

1. $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = (y, x)$
2. $\forall x, y, z \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda.x + \mu.y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \mu\varphi(y, z)$
3. $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$
4. $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Souvent le produit scalaire est écrit comme un crochet :$\varphi(.,.) = \langle .,. \rangle$

Définition : Espace Préhilbertien

Un **espace vectoriel** muni d'un **produit scalaire** est un **espace préhilbertien**. En posant $\|x\|_2 = \sqrt{\varphi(x, x)}$, on remarque qu'un espace préhilbertien est un cas particulier d'espace vectoriel normé

Définition : Suite de Cauchy, Espace complet

On appelle **Suite de Cauchy** dans un espace vectoriel normé (ou dans $\mathbb{R}$) une suite de vecteurs vecteur (ou de réels) vérifiant :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, n' > N \in \mathbb{N}, \|x_m - x_n\| < \varepsilon$
Un **espace vectoriel** est dit **complet**, si et seulement si toutes les suite de cauchy convergent. Par exemple $\mathbb{R}$ **est complet**, $\mathbb{Q}$ non.

Définition : Espace de Banach

Un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de cauchy converge est un **espace de Banach**.

Le théorème de l'analyse Hilbertienne

La meilleure approximation d'un vecteur d'un espace vectoriel E dans un sous espace vectoriel F est sa **projection orthogonale** sur l'espace F.

Démonstration

D'après le théorème de **Pythagore**, on a :
$\|x\|^2 = \|x - pr_F^{\perp}(x)\|^2 + \|pr_F^{\perp}(x)\|^2$
Si on choisissait un autre vecteur y dans F, par le théorème de Pythagore, on aurait : $\|x - y\|^2\| \geq \|x - pr_F^{\perp}(x)\|^2$
$\square$

Espace convexe

On dit qu'un ensemble C, (en général une partie d'un espace vectoriel normé) est **convexe** si et seulement si quel que soit deux éléments x et y de C, **le segment** d'origine x et d'extrémité y, a savoir l'ensemble des vecteurs $\lambda.x + (1 - \lambda).y$, λ étant un réel entre 0 et 1, est inclus dans C.

Le théorème de l'analyse Hilbertienne : Généralisation

La meilleure approximation d'un vecteur d'un espace vectoriel E dans un ensemble **convexe complet** C est sa **projection orthogonale** sur l'espace F.
la démonstration est sensiblement identique aà la précédente.

Exercices :

Exercice 1

On considère les fonctions $f_n(x) = x^n$

1. Etudier la convergence simple et uniforme de la suites de fonction f_n sur l'ensemble $[0, 1]$:
2. Même question si on resteint l'intervalle d'étude à $[0, \alpha]$, $\alpha < 1$
3. Même question si on resteint l'intervalle d'étude à $[0, 1[$

Exercice 2

Etudier la convergence simple et uniforme pour les suites de fonctions suivantes sur l'ensemble $\mathbb{R}$: $f_n(x) = exp(-nx^2)$, $f_n(x) = \dfrac{1 - exp(-n^2x^2)}{t}$

Exercice 3

Etudier la convergence simple et uniforme pour les suites de fonctions suivantes sur l'ensemble $\mathbb{R}$: $f_n(x) = \dfrac{x}{\pi}\mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}]}(x)$

Exercice 4

On se propose de montrer que l'espace E, des fonctions continues sur $[0,1]$ **n'est pas complet** pour la norme convergence en moyenne ; on considère la suite de fonction de E :
$f_n(x) = 1$ pour $x \in [0, 1/2]$ et $f_n(x) = 1$ pour $x \in [1/2 + 1/n, 1]$ et f_n affine sur $[1/2, 1/2 + 1/n]$.
Montrer que f_n est de Cauchy mais **ne converge pas** dans E

Exercice 5

On pose $H = L^2[0, +\infty[$,

1. Trouver les constantes $a, b, c, a > 0, b > 0$ tel que : $f_1(t) = ae^{-t}$, $f_2(t) = be^{-2t} + ce^{-t}$ vérifiant $\|f_1\|_2 = \|f_2\|_2 = 1$, $\langle f_1, f_2\rangle = 0$
2. Soit $\varphi \in H$, Quelle est **la meilleure approximation** $\widetilde{\varphi}$ de φ sur l'espace vectoriel H
3. Soit $\lambda > 0$, $\varphi(t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0$ Calculer α_1, α_2

Exercice 6

Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est **pas complet**
Indication : fabriquer **une suite de cauchy** d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$

Exercice 7

Donner la meilleure approximation de $|x|$ par des **fonctions polynômes** de degrés inférieur ou égal à 2

Exercice 8

On considère la suite de fonction sur [0,1] :

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & 0 \leq x \leq 1/2n \\ 2 - 2nx, & 1/2n \leq x \leq 1/n \\ 0, & 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Etudier la **convergence simple** de cette suite de fonction.
2. La convergence est elle uniforme sur [0,1] ?
3. Montrer que toutes les fonctions f_n sont dand $L^1[0,1]$
4. Montrer que toutes les fonctions f_n sont dand $L^2[0,1]$
5. Etudier la convergence en **moyenne** et en **moyenne quadratique**.